Homman nimi on matematiikka

MA150 Murtoluvut

hommannimionmatematiikka.com, yiptree.com
3.2.1 13. lokakuuta 2020

Sisältö

MA151 Desimaalilukujen laskutoimituksia A, B ja C **4**
Pronssi 5
Hopea (*T) 8
Kulta (*T) 13

MA152 Kymmenjärjestelmä A ja B **16**
Pronssi 18
Hopea 19
Kulta (*S) 21

MA153 Kymmenjärjestelmä A ja B **27**
Pronssi 28
Hopea 29
Kulta 30

MA154 Murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku A ja B **31**
Pronssi 33
Hopea 34
Kulta 35

MA155 Tukiopetus- ja kertaustehtäviä **37**

MA156 Erinimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku sekä supistaminen ja laventaminen A, B ja C **39**
Pronssi 40
Hopea (*T) 41
Kulta (*T) 43

MA157 Murtolukujen kertolasku A, B ja C **47**
Pronssi 50
Hopea (*T) 51
Kulta (*T) 54

MA157 Murtolukujen jakolasku A, B ja C **57**
Pronssi 61
Hopea (*T) 62
Kulta (*T) 64

MA159 Osan ottaminen luvusta, kokonaisuuden jakaminen osiin sekä sanalliset tehtävät A, B, C ja D **70**
Pronssi 73
Hopea (*T) 74
Kulta (*T) 80

MA160 Tukiopetus- ja kertaustehtäviä **83**
Pronssi 85
Hopea 86
Kulta 87

MA151 Desimaalilukujen laskutoimituksia A, B ja C

Desimaaliluvut

Luvussa $253,0532$ kokonaisosa on 253 ja desimaaliosa on 0532.

Yhteen- ja vähennyslasku

Desimaalipilkut laitetaan allekkain ja lasketaan normaalisti.

Summa, eli yhteenlasku

Esimerkki 1

Laske $23,34 + 25,65$.

$$\begin{array}{rrrrrr} & 2 & 3 & , & 3 & 4 \\ + & 2 & 5 & , & 6 & 5 \\ \hline & 4 & 8 & , & 9 & 9 \end{array}$$

Vastaus 48,99.

Erotus, eli vähennyslasku

Esimerkki 2

Laske $52,25 - 50,31$.

$$\begin{array}{rrrrrr} & & \not{1} & & & \\ & 5 & 2 & , & 2 & 5 \\ - & 5 & 0 & , & 3 & 1 \\ \hline & 0 & 1 & , & 9 & 4 \end{array}$$

Vastaus 1,94.

Kertolasku, eli tulo

Kerrotaan ilman pilkkuja. Vastaukseen tulee yhtä monta desimaalia, kun kerrottavissa on yhteensä.

Esimerkki 3

Laske $1,4 \cdot 2$.

Luvuissa yhteensä yksi desimaali (4). Kerrotaan ilman pilkkuja.

$14 \cdot 2 = 28$

Lisätään vastaukseen pilkku oikealle paikalle. $2,8$ $\leftarrow$ vastaukseen yksi desimaali.

Esimerkki 4

Laske $32,255 \cdot 0,51$.

Luvuissa on yhteensä viisi desimaalia (255) ja (51). Kerrotaan luvut allekkain ilman pilkkuja.

			3	2	2	5	5					
			·			5	1					
			3	2	2	5	5					
+	1	6	1	2	7	5		~~2~~	~~2~~	~~1~~	~~1~~
	1	6	4	5	0	0	5					

Vastaus $16,45005$ $\leftarrow$ vastaukseen viisi desimaalia.

MA151 Pronssi

P1. Kirjoita luku.

a) Kokonaisosa on 345 ja desimaaliosa on 45.
b) Kokonaisosa on 3 ja desimaaliosa on 44775.
c) Kokonaisosa on 3 ja desimaaliosa on 0.
d) Kokonaisosa on 6 ja desimaaliosa on 86.

P2. Vastaa kysymyksiin 1-3.

a) $56456546,65455$
(a1) Kuinka monta desimaalia luvussa on?
(a2) Mikä on kolmannen desimaalin numero?
(a3) Mikä on luvun kokonaisosa?

b) $4545,88787$
   (b1) Kuinka monta desimaalia luvussa on?
   (b2) Mikä on kolmannen desimaalin numero?
   (b3) Mikä on luvun kokonaisosa?

c) $4,8796$
   (c1) Kuinka monta desimaalia luvussa on?
   (c2) Mikä on kolmannen desimaalin numero?
   (c3) Mikä on luvun kokonaisosa?

d) $0,38768787$
   (d1) Kuinka monta desimaalia luvussa on?
   (d2) Mikä on kolmannen desimaalin numero?
   (d3) Mikä on luvun kokonaisosa?

P3. Pyöristä luku kolmen desimaalin tarkkuuteen.
   a) $546,65455$
   b) $45,88787$
   c) $4,8796$
   d) $0,38768$

P4. Laske allekkain.
   a) $546,3 + 3,3$
   b) $544,6 + 34,234$
   c) $3,42 + 436,2$
   d) $34,626 + 6,342$

P5. Laske allekkain.
   a) $546,3 - 3,3$
   b) $544,6 - 34,234$
   c) $3,42 - 436,2$
   d) $34,626 - 6,342$

P6. Laske allekkain.
   a) $3,2 \cdot 45,6$
   b) $12 \cdot 5,36$
   c) $3,4 \cdot 1,3$
   d) $0,78 \cdot 0,456$

Valinnanpaikka

P7. Kirjoita luku.

a) Kokonaisosa on 87 ja desimaaliosa on 543.
b) Kokonaisosa on 35 ja desimaaliosa on 4.
c) Kokonaisosa on 5 ja desimaaliosa on 9524.
d) Kokonaisosa on 8 ja desimaaliosa on 454887.
e) Kokonaisosa on 899234 ja desimaaliosa on 5454.
f) Kokonaisosa on 34 ja desimaaliosa on 54543.

P8. (1) Kuinka monta desimaalia luvussa on? (2) Mikä on kolmannen desimaalin numero? (3) Mikä on luvun kokonaisosa?

a) $53,23231$
b) $0,255353$
c) $0,5653$
d) $45552,866665$
e) $65466,355$
f) $3,554646486$

P9. Laske allekkain.

a) $34,26 + 3,4$
b) $2,478 + 1,445$
c) $34,12 + 4,45$
d) $2346,243 + 2,462$
e) $3,421 + 3,4$
f) $1,36 + 0,123$

P10. Laske allekkain.

a) $34,26 - 3,4$
b) $2,478 - 1,445$
c) $34,12 - 4,45$
d) $2346,243 - 2,462$
e) $3,421 - 3,4$
f) $1,36 - 0,123$

P11. Laske allekkain.

a) $7,8 \cdot 0,568$
b) $3,5 \cdot 45$
c) $34,6 \cdot 6,0$
d) $9,5 \cdot 2,56$
e) $0,43 \cdot 7,3$
f) $54,0 \cdot 9,80$

MA151 Hopea (*T)

Pyöristäminen

Kun luku pyöristetään, se laitetaan halutusta kohdasta poikki. Halutun kohdan jälkeinen numero määrää, kasvaako viimeinen lukuun jäävä numero seuraavaan kokonaiseen. Kun seuraava kokonainen on lähempänä kuin edellinen, niin viimeinen lukuun jäljelle jäävä numero kasvaa yhdellä.

Esimerkki 1a

Pyöristä luku a) 35871 b) 35431 tuhansien tarkkuuteen.

a) $35|871 \approx 36000$

b) $35|431 \approx 35000$

Esimerkki 1b

Pyöristä luku a) 35831 b) 35431 satojen tarkkuuteen.

a) $358|71 \approx 35900$

b) $354|31 \approx 35400$

Esimerkki 2

Pyöristä luku a) $35,471$ b) $35,441$ kymmenesosien tarkkuuteen.

a) $35,4|71 \approx 35,5$

b) $35,4|41 \approx 35,4$

Pyöristyssäännöt

Kun ensimmäinen poisjäävä numero on $5, 6, 7, 8$ tai 9, niin luku pyöristyy ylöspäin.

Kun ensimmäinen poisjäävä numero on $0, 1, 2, 3$ tai 4, niin luku ei pyöristy ylöspäin.

Jakolasku

Mikäli jakajassa (alhaalla / jakomerkin jälkeen) on desimaali luku, lavennetaan siten että jakajaan tulee kokonaisluku. Lavennetaan, eli kerrotaan sekä osoittaja että nimittäjä samalla luvulla $10, 100, 1000...$

Esimerkki 3

Laske $\frac{4,4}{2,2}$.

Ennen jakamista lavennetaan (kerrotaan) molemmat luvut kymmenellä.

$\frac{4,4}{2,2} = \frac{44}{22} = 2$

Jakolasku jakokulmassa

Esimerkki 4

Laske $\frac{7}{5}$.

Jaa lasku jakokulmassa. Katso video ja täydennä sen mukaan lasku.

$\frac{7}{5} = 1,4$

Esimerkki 5

Laske $\frac{3,24}{1,2}$.

$\frac{3,24}{1,2} = \frac{32,4}{12}$

Lavennetaan molemmat luvut kymmenellä. Jaettava tulee jakokulman "sisälle".

Jakokulman laskujärjestys

1. jaa
2. kerro
3. vähennä
4. ota alas "pudota"

$$
\begin{array}{r}
2,7 \\
12\overline{)\,32,4} \\
\underline{-24} \\
84 \\
\underline{-84} \\
0
\end{array}
$$

Jakolaskun osamäärä on $2,7$.

Jakolasku allekkain

Esimerkki 6

Laske $\frac{456,7}{8,9}$.

Lavennetaan kymmenenllä siten että jakajaan tulee kokonaisluku.

Laske $\frac{456,7}{8,9} = \frac{4567}{89} = 4567 : 89$.

1. jaa

Luku 89 ei "mahdu"lukuun 45 kertaakaan. Mietitään kuinka monesti luku 89 "mahtuu"lukuun 456. Luku "mahtuu"5 kertaa.

$4567 : 89 = 5$

2. Kerro

Kerrotaan $89 \cdot 5 = 445$. Merkitään tulo laskuun.

$4567 : 89 = 5$
445

3. Vähennä

Vähennetään $456 - 445 = 11).Merkitäänvastauslaskuun.4567 : 89 = 5$
$\underline{445}$
11

4. Ota alas

Otetaan luku 7 alas, jolloin luku 11 "muuntuu"luvuksi 117.

$4567 : 89 = 5$
$\underline{445}$
117

Koko kierros käyty läpi (jaa, kerro, vähennä ja ota alas). Tehdään kierros uudestaan luvulle 117.

Luku 89 ”mahtuu”lukuun 117 kerran. Merkitään luku 1 vastaukseen. Kerrotaan, vähennetään ja otetaan alas.

$4567 : 89 = 51$
$\underline{445}$
117
$\underline{89}$
$280 \leftarrow$ jattavasta loppui kokonaisluvut. Vastaukseen pilkku.

Luku 89 ”mahtuu”lukuun 280 kolmesti. Tulo on $3 \cdot 89 = 267$.

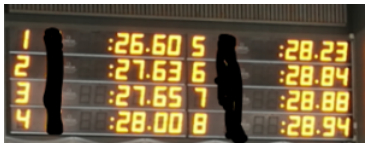
$4567 : 89 = 51,3$
$\underline{445}$
117
$\underline{89}$
280
$\underline{267}$
$130 \leftarrow$ Uusi kierros alkaa.

Tehtävät

H1. Laske vaiheittain allekkain. Muista laskujärjestys.

a) $6,45 \cdot 5,6 + (-4,3)$
b) $506 \cdot 5,3$
c) $5,46 + 8,56 - (+6)$
d) $4,5 - 37,8 + 4,6$
e) $6/7$
f) $8 : 23$
g) $\frac{12}{11}$

H2. Kuvassa erään kilpailun lopputulosaikoja.



a) Kuinka monta sadasosaa on toisen sijan ja kolmannen sijan välillä?
b) Kuinka monella sadasosalla kulta hävittiin?
c) Kuinka suuri ero oli voittajan ja kahdeksannen sijan välillä?

H3. Laske vaiheittain allekkain.
a) $5,4 \cdot 2,1 + 7,6 \cdot 5,6 - 4$
b) $5,4 \cdot 21,0 - 7,6 \cdot (5,6 - 4,2)$
c) $5,4 \cdot (1,10 + 7,54) + 5,6 - 4$
d) $5,4 \cdot 71,0 + (7,6 \cdot 5,6) - 4$

H4. Piirrä lukusuora ja merkitse siihen piste. Mitä kokonaislukua lähimpänä kyseinen piste on?
a) $0,5$
b) $-1,5$
c) $2,25$
d) $-3,3$

H5. Pyöristä luku satojen tarkkuuteen.
a) 315
b) 12384
c) 87458
d) 1438533

H6. Pyöristä luku kymmenien tarkkuuteen.
a) 545
b) 12334
c) 87848
d) $x4xx533$

H7. Pyöristä luku kymmenesosan tarkkuuteen.
a) $23,462$
b) $135,26$
c) $83,236$
d) $33,43$

H8. Pyöristä luku sadasosan tarkkuuteen.
a) $2,462$

b) $15,26$
c) $9,236$
d) $4,43$

MA151 Kulta (*T)

Uudelleen järjestäminen helpoittaa laskemista.

Yhteen- ja vähennyslasku

Esimerkki 1

Laske.

$4,5 - 37,8 + 4,6$
$= 4,5 + 4,6 - 37,8$
$= 9,1 - 37,8$

Kun vähentäjän itseisarvo ($| - 37,8| = 37,8$) on suurempi kuin vähenevän itseisarvo ($|9,1| = 9,1$) , niin vaihdetaan molempien lukujen etumerkit vastakkaiseksi. Vähentäjä muuttuu väheneväksi ja vähenevä vähentäjäksi. Lasketaan allekkain ja muutetaan vastauksen etumerkki vastakkaiseksi.

$$\begin{array}{rrcr} 3 & 7 & , & 8 \\ - & 9 & , & 1 \\ \hline 2 & 8 & , & 7 \end{array}$$

Vastaus on $-28,7$

Kertolasku

Kertolaskun vastaus ei muutu, kun tekijöiden järjestystä vaihdetaan.

Esimerkki 2

$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$
$3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$
$2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$4 \cdot 3 \cdot 2 = 3 \cdot 4 \cdot 2 = 2 \cdot 3 \cdot 4$

Jakolasku

Järjestystä EI saa muuttaa, koska osamäärän vastaus muuttuu.

Esimerkki 3

$10 : 5 = 2$
$5 : 10 = 0,5$

Laskujärjestys

Laskujärjestuksesä on joka tapauksessa pidettävä kiinni.

1. sulkeet $\{[()]\}$, jos useita sulkeita sisimmät lasketaan ensin.

(ensimmäisenä)

[toisena]

{ kolmantena }

2. potenssilaskut

3. kerto- ja jakolaskut vasemmalta oikealle

4. yhteen ja vähennyslaskut vasemmalta oikealle

Esimerkki 4

$3 \cdot 8 : 4 \cdot 2$
$= 24 : 4 \cdot 2$
$= 6 \cdot 2$
$= 12$

Tehtävät

K1. Laske
   a) $-(+4,3) \cdot (4,53) + 6,56 - (3,12)$
   b) $-(-342,34) + (-65,6)$
   c) $+(-2,3) \cdot 5,4 + 4,52 - 343,423$
   d) $3 \cdot 2 - 2 + 3$

e) $42 : 52$
f) $43/4,5$
g) $\frac{4,5}{5,3}$
h) $42/1,8$
K2. Laske.
a)$-(+12,34) \cdot 2,3 + 2,3$
b) $4 \cdot 3,578 - 3 \cdot 5,6$
c) $7,5 \cdot (-4,34)$
d) $-4,85 \cdot (+5,8)$
e) $56,4 \cdot (-8,8)$
f) $-(-3,6) \cdot (-7,64)$

MA152 Kymmenjärjestelmä A ja B

Matematiikan äidinkieltä Luvut jaksotetaan kolmen ryhmiin lopusta päin.

Esimerkki 1

3 000 metriä

12 556 345 hernettä

Kirjaimilla kirjoittaessa pitkät luvut jaksotetaan kuten numerotkin.

Esimerkki 2

Talon hinta on 12 528 345 euroa 50 senttiä.

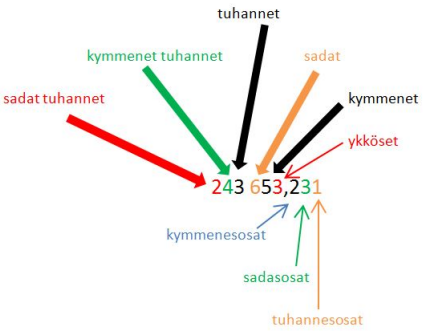
Talon hinta on kaksitoistamiljoonaa viisisataakaksikymmentäkahdeksantuhatta kolmesataaneljäkymmentäviisi euroa viisikymmentä senttiä.

Kymmenjärjestelmä

Luku ilmoittaa määrän. Numero on merkki. Kymmenjärjestelmässä käytetään merkkejä $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ ja 9.

Paikkajärjestelmä

Luvussa jokaisella numeropaikalla on oma merkityksensä ja sillä on oma arvo. Pilkku erottaa kokonaisosat ja desimaaliosat.



Esimerkki 1

Mikä numero on luvussa $3653,23$

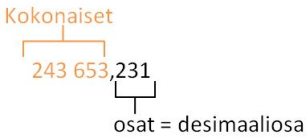
a) satojen

b) tuhansien paikalla?

Vastaus a) 6 b) 3

Desimaaliluvut

Kokonaisosat ja desimaaliosat erotetaan pilkulla.



Kokonaisosa kertoo kuinka monta kokonaista ”palikkaa” luvussa on. Luvussa on 243653 kpl kokonaisia palikoita.

Desimaaliosa kertoo, että luvussa on kokonaista pienempi osa, kokonaisosien lisäksi.

Desimaaliosat

$0,1 = 1 : 10 =$ kymmenesosa$= \frac{1}{10}$

$0,01 = 1 : 100 =$ sadasosa$= \frac{1}{100}$

$0,001 = 1 : 1000 =$ tuhannesosa$= \frac{1}{1000}$

nimetään viimeisen osan mukaan.

Esimerkki 2

$0,45$ on neljäkymmentäviisi sadasosaa $\frac{45}{100}$.

Esimerkki 3

$0,234$ on kaksisataakolmekymmentäneljä tuhannesosaa $\frac{234}{1000}$.

Pronssi

P1. Mitä numeroita on luvussa on
   a) 256625
   b) 33
   c) 24324
   d) 3623?

P2. Mitä lukuyksikköä numero kolme edustaa luvussa?
   a) $2562,043$
   b) $46,34$
   c) $24434,74$
   d) $3624,4436$

P3. Muodosta numeroista $5, 6, 2, 7, 9$ ja 4 korkeintaan kerran käyttämällä
   a) nelinumeroinen luku
   b) kuusinumeroinen luku
   c) desimaaliluku
   d) suurin nelinumeroinen luku.

P4. Laske allekkain.
   a) $127,25 + 15,634$
   b) $337,1 - 59,42$
   c) $43,75 - 42,52$
   d) $210,49 - 0,86$

P5 Valitse pienin luku.
   a) $2,10;\ 2,03;\ 2,02;\ 2,11;\ 2,21$
   b) $0,01;\ 0,08;\ 0,11;\ 0,03;\ 0,4$
   c) $1,022;\ 1,34;\ 1,0307;\ 1,003452$
   d) $0,02;\ 0,123;\ 0,002;\ 0,003;\ 0,047$

P6. Valitse suurin luku.
   a) $2,10;\ 2,03;\ 2,02;\ 2,11;\ 2,21$
   b) $0,01;\ 0,08;\ 0,11;\ 0,03;\ 0,4$
   c) $1,022;\ 1,34;\ 1,0307;\ 1,003452$

d) $0,02;\ 0,123;\ 0,002;\ 0,003;\ 0,047$

Valinnanpaikka

P7. Laske allekkain.
a) $546 - 4$
b) $108,67 - 1,56$
c) $35,4 - 5,21$
d) $45,5 - 5,76$
e) $335,72 - 54,6$
f) $8,8 - 6$

P8. Mitä numeroita on luvussa
a) 100000000
b) 37
c) 2112
d) 21736
e) 99
f) 36?

MA152 Hopea

Luvun ilmoittaminen summalausekkeena

Summalausekkeessa luku ilmoitetaa lukuyksikköjen summana.

Esimerkki 1

Muodosta luvusta $3566,56$ summalauseke.

3 tuhatta $= 3 \cdot 1000$
5 sataa $= 5 \cdot 100$
6 kymmentä $= 6 \cdot 10$
$6 = 6 \cdot 1$
5 kymmenesosaa $= 5 \cdot 0,1$
6 sadasosaa $= 6 \cdot 0,01$

summalauseke on

$$3566,56 = 3 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 6 \cdot 1 + 5 \cdot 0,1 + 6 \cdot 0,01.$$

Esimerkki 2

Mikä luku on kyseessä?
$6 \cdot 100000 + 6 \cdot 1000 + 5 \cdot 10 + 9 \cdot 0,01 + 2 \cdot 0,001$

$= 60650,092$

6	0	0	0	0	0	,			
		6	0	0	0	,			
				5	0	,			
					0	,	0	9	
+					0	,	0	0	2
6	0	6	0	5	0	,	0	9	2

tehtävät

H1. Muodosta lukuyksikköjen mukaan summalauseke luvusta
a) 34
b) 453
c) 432, 45
d) 4678, 68

H2. Merkitse oikea vertailumerkki x tilalle.
a) $0,54\ x\ 0,45$
b) $2,34\ x\ 2,56$
c) $2,26\ x\ 2,45$
d) $2,4\ x\ 2,5$

H3. Kirjoita luku
a) kolmesataakaksikymmentäneljä kokonaista ja kuusi tuhanesosaa
b) kaksi kokonaista ja kolmekymmentäviisi sadasosaa
c) kahdeksankymmentäkolme kokonaista ja seitsemänsataakolmekymmentäkolme tuhannesosaa
d) viisitoista ja kolme tuhannesosaa.

H4. Mikä luku on kyseessä?
a) $2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 8 \cdot 1 + 9 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,01$
b) $2 \cdot 10000 + 3 \cdot 1000 + 8 \cdot 10 + 9 \cdot 0,01 + 9 \cdot 0,001$
c) $5 \cdot 100000 + 2 \cdot 10000 + 8 \cdot 1000 + 5 \cdot 1 + 9 \cdot 0,001$
d) $2 \cdot 1000000 + 3 \cdot 100000 + 8 \cdot 100 + 9 \cdot 0,001 + 9 \cdot 0,0001$

MA152 Kulta (*S)

Potenssimerkintä

Potenssimerkintä kertoo kuinka monta kertaa luku on kerrottu itsellään.

Esimerkki 1

a) $10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$
b) $2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
c) $10^0 = 1$
c) $2^0 = 1$

Huom! Nollas potenssi on aina 1.

Kymmenjärjestelmä palikkamallilla

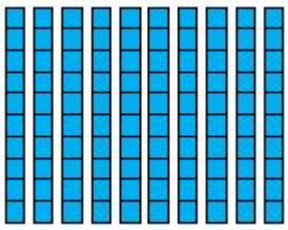
Kymmenjärjestelmässä lukuyksiköihin mahtuu "palikoita"kymmenen potenssin mukaan.

Ykkösiin (x) mahtuu kymmenen kertaa yksi "palikkaa", eli kymmenen "palikkaa".

$10 \cdot 1 = 10 \cdot 10^0 = 10$

Kymmeniin (x0) mahtuu kymmennen kertaa kymmenen "palikkaa", eli sata "palikkaa".

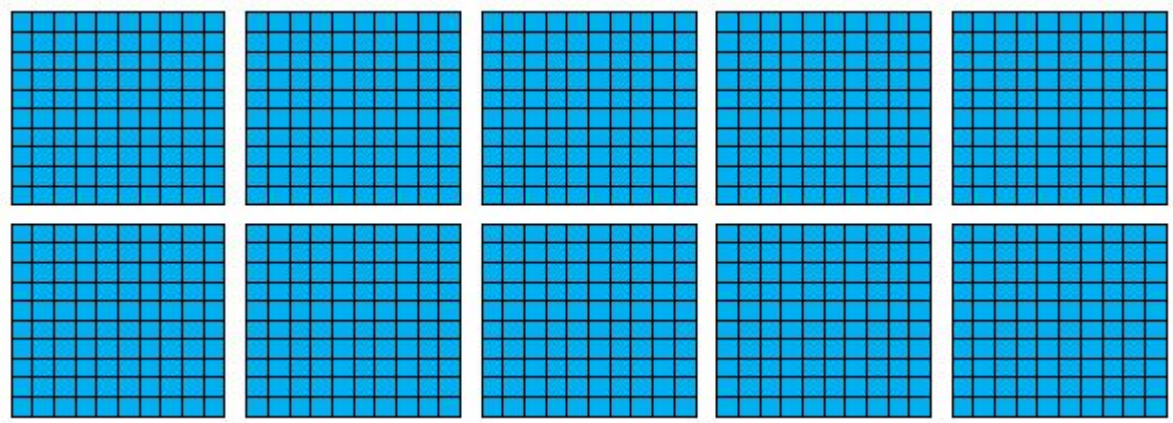
$10 \cdot 10 = 10 \cdot 10^1 = 100$



Satoihin (x00) mahtuu kymmenen kertaa sata "palikkaa", eli tuhat "palik-

kaa”.

$10 \cdot 100 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10 \cdot 10^2 = 1000$



Tuhansiin (x000) mahtuu kymmenen kertaa tuhat ”palikkaa”, eli kymmentuhatta ”palikkaa”.

$10 \cdot 1\ 000$
$= 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$
$= 10 \cdot 10^3 = 10\ 000.$

Luku voidaan ilmoittaa summalausekkeena potenssimuodossa. Kerroin kertoo kuinka monta kyseistä lukuyksikköä luvussa on. Potenssimuoto kertoo lukuyksikön paikan.

Esimerkki 2

Luku 2392 summalausekkeena on

$2 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 2 \cdot 1$
$= 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0.$

Binäärijärjestelmä

Binäärijärjestelmässä käytetään vain numeroita 0 ja 1. Lukuyksikköihin mahtuu kakkosen potenssien mukainen määrä ”palikoita”. Tietokoneiden käyttö perustuu binäärilukuihin. 0 = ei ja 1 = kyllä.

”Ykkösiin”(x) mahtuu yksi ”palikka”.

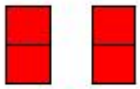
$1 \cdot 1 = 1 \cdot 2^0 = 1$

”kymmeniin”(x0) mahtuu kaksi kertaa ”ykköset”, eli kaksi ”palikkaa”.

$2 \cdot 1 = 2^1 = 2$

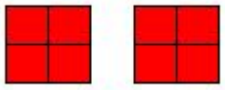
”satoihin”(x00) mahtuu kaksi kertaa ”kymmenet”, eli neljä ”palikkaa”.

$2 \cdot 2 = 2^2 = 4$



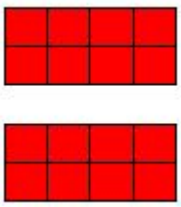
”tuhansiin”(x000) mahtuu kaksi kertaa ”sadat”, eli kahdeksan ”palikkaa”.

$2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$



”kymmeniin tuhansiin”(x0000) mahtuu kaksi kertaa ”tuhannet”, eli 16 ”palikkaa”.

$2 \cdot 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$



Esimerkki 3

Esitä kymmenjärjestelmän luku 85 binäärijärjestelmässä.

Binääriluku löytyy vähentämällä lukuyksiköiden maksimimääriä kunnes saadaan tulokseksi nolla.

Lukuyksikköjen maksimi määrät ovat luvun kaksi potensseja, eli $64, 32, 16, 8, 4, 2$ ja 1.

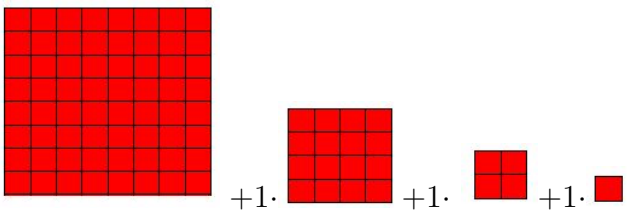
Koska kyseessä on binääriluku, niin luvut voidaan vähentää vain yhden kerran. Aluksi vähennetään suurin mahdollinen lukuyksikkö.

$85 - 64 - 16 - 4 - 1 = 0$

Vähennettävistä nähdään, mistä yksiköistä luku 85 koostuu $64+16+4+1 = 85$.

Luku 85 on summalausekkeena

$1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0$



ja näin ollen luku on binäärimuodossa $1000\ 000 + 10\ 000 + 100 + 1 = 1010101$.

Esimerkki 4

Mitä lukua binääriluku a) 1110 b) 1011 vastaa kymmenpotenssimuodossa?

a) $1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
$= 8 + 4 + 2 + 0 = 14$

b) $1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0$
$= 8 + 0 + 2 + 1 = 11$

Esimerkki 5

Ilmoita luku 52 a) 3−järjestelmässä. b) 4−järjestelmässä.
a) Kolmejärjestelmässä on vain numerot $0, 1$ ja 2.

"ykköset"(x) $3^0 = 1$
"kymmenet"(x0) $3^1 = 3$
"sadat"(x00) $3^2 = 9$
"tuhannet"(x000) $3^3 = 27$
"kymmenettuhannet"(x0000) $3^4 = 81$

Lukuyksikköjen maksimi määrät ovat luvun kolme potensseja $81, 27, 9, 3$ ja 1. Korkeintaan kaksi samaa lukuyksikköä voidaan vähentää, koska kyseessä on 3−järjestelmä.

$52 - 27 - 9 - 9 - 3 - 3 - 1 = 0$

Luku 52 summalausekkeena on

$1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0$

Luku 52 on 3−järjestelmässä luku 1221.

b) 4−järjestelmässä on vain numerot $0, 1, 2$ ja 3.

"ykköset"(x) $4^0 = 1$
"kymmenet"(x0) $4^1 = 4$
"sadat"(x00) $4^2 = 16$
"tuhannet"(x000) $4^3 = 64$

Lukuyksikköjen maksimi määrät ovat luvun neljä potensseja $64, 16, 4$ ja 1. Korkeintaan kolme samaa lukuyksikköä voidaan vähentää, koska kyseessä on 4-järjestelmä.

$52 - 16 - 16 - 16 - 4 = 0$

Luku 52 summalausekkeena on

$3 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 0 \cdot 4^0$

Luku 52 on 4−järjestelmässä luku 310.

Tehtävät

K1. Muunna luku binäärijärjestelmään.
   a) 9
   b) 25
   c) 34
   d) 74

K2. Ilmoita luku 3−järjestelmässä.
   a) 9
   b) 23
   c) 34
   c) 101

K3. Ilmoita binääriluku kymmenjärjestelmässä.
   a) 1100
   b) 1011
   c) 111000
   d) 110011

K4. Ilmoita luku 4−järjestelmässä.
   a) 5
   b) 73
   c) 230

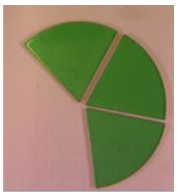
K5. Opettele taikuriksi. Hämmästytä kaverisi!
   Lataa ohje yiptrestä.

MA153 Kymmenjärjestelmä A ja B

Murtoluku

Murtoluku kertoo, kuinka monta ja minkä kokoista palaa on kyseessä.

$$\frac{osoittaja}{nimittäjä} = \frac{3}{5}$$



Opettele tutumpi muistisääntö.

Nenä osoittaa, suu nimittää tai otsa osoittaa, nenä nimittää.

$$\frac{\text{osoittaja}}{\text{nimittäjä}} = \frac{\text{nenä}}{\text{suu}} = \frac{\text{otsa}}{\text{nenä}}$$

Sekaluku

Sekaluvussa on kokonaisosat sekä murto-osat.

$$2\frac{3}{6}$$

Kaksi kokonaista ja kolme kuudesosaa.

Esimerkki 1

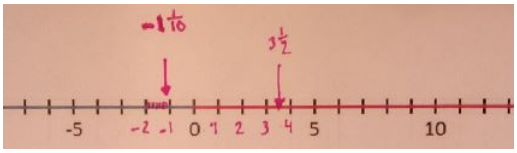
Muunna murtoluku $\frac{7}{3}$ sekaluvuksi.

$\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$

Murtoluku lukusuoralla

Esimerkki 2

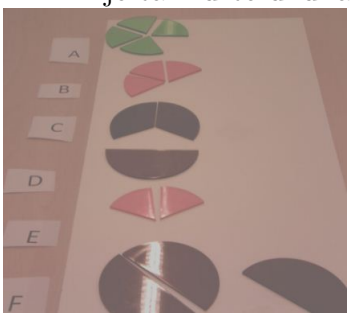
Merkitse luvut a) $3\frac{1}{2}$ b) $-1\frac{1}{10}$ lukusuoralle.



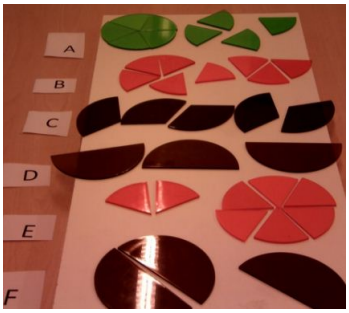
MA153 Pronssi

P1. Katso video. Kirjoita luvut murtolukuina. (`https://vimeo.com/300687968`)

P2. Kirjoita murtolukuna.



P3. Kirjoita murtoluvut sanallisesti. Esim. Kuusi kokonaista ja kolme viidesosaa.



P4. Kirjoita murtolukuna.

a) Nimittäjä on kuusi ja osoittaja on kahdeksan.
b) Osoittaja on seitsemän ja nimittäjä on kolme.
c) Osoittaja on yhdeksän ja nimittäjä on viisi.
d) Nimittäjä on kolme ja osoittaja on kaksi.

P5. Tee taulukko ja lisää siihen sekaluvut. Mikä on luvun kokonaisosa ja murto-osa?

a) 2
b) 4
c) $2\frac{2}{5}$

d) $9\frac{2}{9}$.

	sekaluku	kokonaisosa	murto-osa
a)			
b)			
c)			
d)			

Valinnanpaikka

P6. Kirjoita murtolukuna.

a) Nimittäjä on viisi ja osoittaja on kolme.
b) Osoittaja on yhdeksäntoista ja nimittäjä on kymmenen.
c) Osoittaja on kolmetoista ja nimittäjä on viisi.
d) Osoittaja on kahdeksan ja nimittäjä on viisi.
e) Nimittäjä on kolme ja osoittaja on yhdeksän.
f) Osoittaja on kuusi ja nimittäjä on kolmetoista.

MA153 Hopea

H1. Ilmoita sekaluku murtolukuna.

a) $1\frac{2}{5}$
b) $4\frac{3}{5}$
c) $2\frac{1}{3}$
d) $7\frac{2}{3}$

H2. Ilmoita edellisen tehtävän murtoluvuista osoittajat.

H3. Piirrä pizza- tai kakkumalli murtoluvulle.

a) $\frac{2}{4}$
b) $1\frac{3}{5}$
c) $\frac{2}{7}$
d) $\frac{8}{3}$

H4. Ilmoita edellisestä tehtävästä nimittäjät.

Valinnanpaikka

H5. Piirrä pizza- tai kakkumalli murtoluvulle.

a) $2\frac{2}{10}$
b) $\frac{1}{4}$
c) $\frac{3}{5}$

d) $1\frac{1}{4}$
e) $4\frac{3}{7}$
f) $2\frac{5}{3}$

MA153 Kulta

K1. Piirrä lukusuora ja merkitse siihen pisteet.

a) $5\frac{1}{2}$
b) $-3\frac{1}{4}$
c) $2\frac{2}{2}$
d) $-6\frac{1}{10}$

K2. Lisää x:n paikalle oikea vertailumerkki.

a) $4\frac{5}{7}\ x\ 4\frac{2}{7}$
b) $3\frac{4}{4}\ x\ 3\frac{99}{100}$
c) $2\frac{12}{13}\ x\ 2\frac{6}{14}$
d) $-6\frac{2}{3}\ x\ -6\frac{1}{3}$

K3. Käytössäsi on numerot $1, 3, 8$ ja 9. Kutakin numeroa saa käyttää vain kerran tehtävää kohden.

a) Kirjoita suurin luku
b) Kirjoita pienin luku
c) Kirjoita kaksi lukua joiden väliin voit laittaa $<$ merkin.
d) Kirjoita kaksi lukua joiden väliin voit laittaa $>$ merkin.

MA154 Murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku A ja B

$\frac{\text{osoittaja}}{\text{nimittäjä}} = \frac{\text{nenä}}{\text{suu}} = \frac{\text{otsa}}{\text{nenä}}$

Muistisääntönä voi pitää jompaa kumpaa:

- Nenä osoittaa, suu nimittää.
tai
- Otsa osottaa, nenä nimitää.

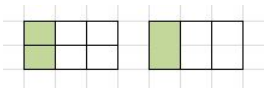
Supistaminen

Supistamisessa murtoluku ilmoitetaan mahdollisimman pieninä lukuina isoina kakun palasina.

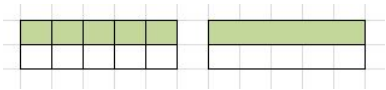
Esimerkki 1

Supista.

a) $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$



b) $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$



Murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskussa "kakkupalasten"on oltava yhtä suuret. Vain palasten määriä lasketaan yhteen.

Murtolukujen yhteenlasku

Murtolukujen yhteenlaskussa nimittäjät oltava samat. Osoittajat lasketaan yhteen.

Esimerkki 2

$\frac{3}{6} + \frac{5}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

Murtolukujen yhteenlaskun yleinen kaava

$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$, missä a, b ja c ovat kokonaislukuja ja $b \neq 0$.

Murtolukujen vähennyslasku

Vähennyslaskussa nimittäjien oltava yhtä suuret. Osoittajien erotus lasketaan.

Esimerkki 3

$\frac{2}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2-3}{4} = -\frac{1}{4}$

Esimerkki 4

$-\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

Murtolukujen vähennyslaskun yleinen kaava

$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$, missä a, b ja c ovat kokonaislukuja ja $b \neq 0$.

Sekalukujen yhteen- ja vähennyslasku

Kokonaisosat voidaan laskea yhteen, ja murtolukuihin käytetään yllä olevia sääntöjä.

Esimerkki 5

$3\frac{2}{6} + 2\frac{3}{6} = 5\frac{2+3}{6} = 5\frac{5}{6}$

MA154 Pronssi

P1. Supista jos mahdollista.

a) $\frac{2}{6}$
b) $\frac{4}{16}$
c) $\frac{1}{3}$
d) $\frac{4}{8}$

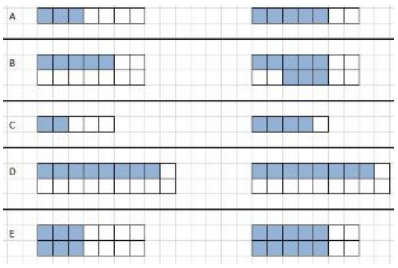
P2. Laske.

a) $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}$
b) $\frac{3}{8}+\frac{3}{8}$
c) $\frac{6}{7}+\frac{2}{7}$
d) $\frac{5}{12}+\frac{7}{12}$

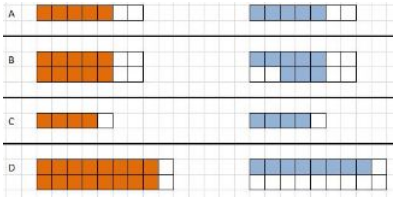
P3. Laske.

a) $\frac{1}{5}-\frac{3}{5}$
b) $\frac{3}{8}-\frac{3}{8}$
c) $\frac{6}{7}-\frac{2}{7}$
d) $\frac{5}{12}-\frac{7}{12}$

P4. Muodosta yhteenlaskun lauseke. Laske ja supista. Sininen väri ei tarkoita negatiivista lukua.

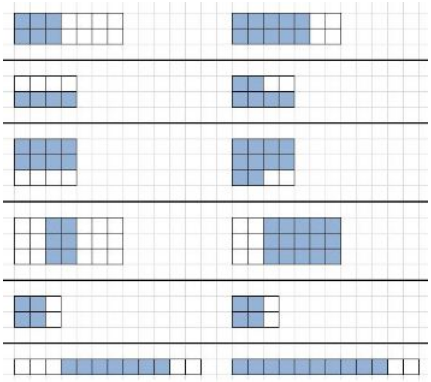


P5. Muodosta erotus. Laske ja supista. Sininen väri ei tarkoita negatiivista lukua.



Valinnanpaikka

P6. Muodosta yhteenlaskun lauseke. Laske ja supista. Sininen väri ei tarkoita negatiivista lukua.



MA154 Hopea

H1. Laske.

a) $3\frac{3}{5}+\frac{3}{5}$
b) $\frac{7}{8}-\frac{5}{8}$
c) $3\frac{4}{7}-1\frac{6}{7}$
d) $2\frac{2}{12}+2\frac{7}{12}$

H2. Tee lausekkeet ja laske. Voiko lauseke olla totta? Perustele.

a) Kaksi kolmasosaa oppilaista on karkkilakossa ja yksi kolmasosa ei ole.

b) Luokassa viisi kahdeksasosaa oppilasta pitää farkkuja. Kaksi kahdeksasosaa pitää verkkareita. Loput ovat hameessa. Kuinka monta osaa oppilaista on hameessa?

c) Kolmeen neljäsosaa lisätään kaksi neljäsosaa.

d) Kaksi kolmasosaa, joista otetaan pois yksi kolmasosa.

H3. Piirrä kakkumalli laskutoimitukselle ja laske.

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$
b) $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$
c) $\frac{4}{5}+\frac{3}{5}$
d) $\frac{3}{6}+\frac{4}{6}$

Valinnanpaikka

H4. Laske.

a) $1\frac{2}{5} - \frac{2}{5}$
b) $2\frac{4}{3} + \frac{5}{3}$
c) $2\frac{6}{9} + 3\frac{4}{8}$
d) $2\frac{5}{4} - 1\frac{3}{4}$
e) $2\frac{5}{2} + 5\frac{4}{2}$
f) $4\frac{6}{4} - 2\frac{6}{4}$

H5. Muodosta lauseke ja laske.

a) Viisi kuudesosaa ja siitä vähennetään kolme kuudesosaa.
b) Seitsemän seitsemäsosaa, johon lisätään kolme seitsemäsosaa.
c) Kaksi kokonaista, johon lisätään kaksi kahdesosaa.
d) Kolme kuudesosaa ja siihen lisätään kuudesosa.
e) Viidesosa ja siihen lisätään kaksi viidesosaa.
f) Kolme kertaa kuusi.

MA154 Kulta

K1. Muodosta lauseke ja laske.

a) Pekka, Jussi ja Seppo söivät kakkua seuraavasti. Pekka söi kolme yhdeksäsosaa, Jussi söi viisi kuudesosaa ja Seppo puoli kakkua. Laita pojat järjestykseen sen mukaan kuka söi eniten kakkua.

b) Muropaketissa on jäljellä kolme neljäsosaa. Keijo söi jäljellä olevista muroista kaksi kahdeksasosaa. Muodosta erotus ja laske, kuinka paljon muroja jäi jäljelle.

K2. Merkitse luvut lukusuoralle.

a) Kolme kuudesosaa.
b) Kolme kokonaista ja yksi kahdesosa.
c) Kaksikymmentä viidesosaa.

K3. Laske.

a) $3\frac{2}{5}+\frac{1}{5}-\frac{4}{5}$
b) $\frac{2}{8}-\frac{2}{8}+\frac{3}{8}$
c) $2\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}$
d) $2\frac{1}{12}+2\frac{2}{12}-\frac{2}{12}$

K4. Laske.

a) $\frac{2}{6} + \frac{1}{3}$
b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{8} + \frac{3}{4}$
d) $\frac{7}{9} + \frac{2}{3}$

K5. Laske.

a) $\frac{1}{5} + \frac{1}{3}$
b) $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$
c) $\frac{1}{9} + \frac{3}{2}$
d) $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$

K6. Laske.

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$
b) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$
c) $\frac{6}{7} + \frac{3}{8} + \frac{1}{2}$
d) $\frac{5}{9} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$

MA155 Tukiopetus- ja kertaustehtäviä

1. Laske allekkain.
   a) $5,43 + 3,4$
   b) $45,62 + 23,454$
   c) $23,46 - 4,632$
   d) $85,76 - 54,6$

2. Pyöristä luku kymmenesosan tarkkuuteen.
   a) $4,526$
   b) $73,475$
   c) $4735,75$
   d) $736,589$

3. Laske allekkain.
   a) $2,3 \cdot 5,4$
   b) $4,3 \cdot 43,2$
   c) $7,6 \cdot 2,46$
   d) $6,2 \cdot 2,6$

4. Muodosta lukuyksikköjen mukaan summalauseke luvusta.
   a) $344,25$
   b) $4893,5$
   c) $44342,45$
   d) $45678,68$

5. Ilmoita sekalukuna.
   a) $\frac{10}{3}$
   b) $\frac{14}{3}$
   c) $\frac{13}{5}$
   d) $\frac{41}{5}$

6. Ilmoita sekaluku murtolukuna.
   a) $2\frac{2}{6}$
   b) $2\frac{4}{5}$
   c) $4\frac{1}{3}$
   d) $7\frac{2}{8}$

7. Supista jos mahdollista.
   a) $\frac{4}{6}$
   b) $\frac{8}{16}$

c) $\frac{2}{3}$
d) $\frac{6}{8}$

8. Laske.
   a) $\frac{3}{5} + \frac{3}{5}$
   b) $\frac{2}{8} + \frac{3}{8}$
   c) $\frac{2}{7} + \frac{2}{7}$
   d) $\frac{5}{12} + \frac{7}{12}$

9. Laske.
   a) $\frac{2}{5} - \frac{3}{5}$
   b) $\frac{3}{8} - \frac{5}{8}$
   c) $\frac{6}{7} - \frac{2}{7}$
   d) $\frac{2}{12} - \frac{7}{12}$

10. Laske.
    a) $3\frac{2}{5} + (-\frac{1}{5}) - \frac{4}{5} + \frac{1}{5}$
    b) $\frac{2}{8} - \frac{2}{8} + (\frac{-3}{8}) - \frac{6}{8}$
    c) $2\frac{2}{7} - (-1\frac{3}{7}) + \frac{2}{7} + \frac{4}{7}$
    d) $(-2\frac{1}{12}) + 2\frac{2}{12} - \frac{2}{12} - \frac{5}{12}$

MA156 Erinimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku sekä supistaminen ja laventaminen A, B ja C

Supistaminen

Supistamisessa "kakun paloja"yhdistellään ja luvut pienenevät.

Esimerkki 1

Supista$\frac{2}{8}$ luvulla 2.

Supistamista voidaan ajatella siten että lukua "työnnetään"pienemmäksi oikeasta ylänurkasta. Tarvittaessa supistamisen merkki voidaan laittaa oikeaan ylänurkkaan, mutta sitä ei ole pakko tehdä.

$\frac{2}{8}^{(2} = \frac{2:2}{8:2} = \frac{1}{4}$

Osoittaja ja nimittäjä jaetaan kahdalla. Valivaihetta ei tarvitse merkitä.

$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Laventaminen

Laventamisessa "kakun paloja" leikataan pienemmiksi ja luvut suurenevat.

Esimerkki 2

Lavenna $\frac{2}{8}$ luvulla 2.

Laventamista voidaan ajatella siten, että lukua "työnnetään"suuremmaksi vasemmasta ylänurkasta. Tarvittaessa laventamismerkki voidaan laittaa ylänurkkaan, mutta sitä ei ole pakko tehdä.

$\frac{^{2)}2}{8} = \frac{2 \cdot 2}{8 \cdot 2} = \frac{4}{16}$

Osoittaja ja nimittäjä kerrotaan kahdella. Välivaihetta ei tarvitse merkitä.

$\frac{2}{8} = \frac{4}{16}$

Laventamisessa ja supistamisessa murtoluvun arvo ei muutu.

$\frac{2}{8} = 0,25$

$\frac{1}{4} = 0,25$

$\frac{4}{16} = 0,25$

Erinimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku

1. Muunnetaan nimittäjät yhtä suuriksi.
2. Lasketaan osoittajien summa tai erotus.

Esimerkki 3

Laske $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$.

$\frac{^{2)}1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}^{(3} = \frac{1}{2}$

MA156 Pronssi

P1. Laske. Supista ja ilmoita sekalukuna tarvittaessa.
- a) $\frac{2}{5} + \frac{2}{5}$
- b) $\frac{2}{9} - \frac{3}{9}$
- c) $\frac{3}{8} + \frac{2}{8}$
- d) $\frac{4}{6} - \frac{5}{6}$

P2. Laske ja supista.
- a) $\frac{2}{4} + \frac{1}{2}$
- b) $\frac{1}{2} + \frac{4}{6}$
- c) $\frac{2}{8} + \frac{3}{4}$
- d) $\frac{3}{10} + \frac{1}{5}$

P3. Laske. Ilmoita vastaus murtolukuna.
- a) $\frac{3}{9} + \frac{4}{9}$
- b) $\frac{2}{4} - \frac{7}{4}$
- c) $\frac{2}{3} - \frac{1}{3}$
- d) $\frac{4}{8} + \frac{3}{8}$

P4. Laske. Ilmoita vastaus murtolukuna.
- a) $\frac{2}{2} + \frac{1}{4}$

b) $\frac{3}{3} + \frac{5}{6}$
c) $\frac{4}{6} + \frac{2}{3}$
d) $\frac{2}{4} + \frac{7}{8}$

P5. Laske. Ilmoita vastaus murtolukuna.
a) $\frac{4}{9} + \frac{2}{27}$
b) $\frac{12}{24} + \frac{3}{6}$
c) $\frac{3}{6} + \frac{2}{2}$
d) $\frac{2}{3} + \frac{5}{9}$

Valinnanpaikka

P6. Laske. Ilmoita vastaus murtolukuna.
a) $\frac{2}{8} + \frac{1}{4}$
b) $\frac{3}{2} + \frac{5}{6}$
c) $\frac{4}{9} + \frac{2}{3}$
d) $\frac{1}{2} - \frac{7}{8}$
e) $\frac{3}{6} + \frac{2}{3}$
f) $\frac{2}{12} - \frac{5}{8}$

P7. Laske. Ilmoita vastaus murtolukuna.
a) $\frac{3}{9} + \frac{4}{3}$
b) $\frac{2}{4} - \frac{5}{2}$
c) $\frac{2}{3} - \frac{1}{12}$
d) $\frac{4}{8} + \frac{3}{4}$
e) $\frac{4}{9} + \frac{2}{3}$
f) $\frac{1}{6} + \frac{3}{24}$

MA156 Hopea (*T)

Usein murtolukujen yhteen-ja vähennyslaskuissa joudutaan supistamaan tai laventamaan molempia murtolukuja.

Esimerkki 1

Laske $\frac{2}{5} + \frac{3}{4}$.

Laskua helpottaa monesti ”ristiin”laventaminen

Ristiin lavennuksessa ensimmäinen murtoluku lavennetaan toisen murtoluvun nimittäjällä (4) ja toinen murtoluku lavennetaan ensimmäisen murtolu-

vun nimittäjällä (5).
$\frac{4)2}{5} + \frac{5)3}{4} = \frac{8}{20} + \frac{15}{20} = \frac{23}{20} = 1\frac{3}{20}$

Sama asia toisella tavalla merkittynä

$\frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 5} + \frac{5 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{8}{20} + \frac{15}{20} = \frac{23}{20} = 1\frac{3}{20}$

Murtolukujen arvo voi olla myös negatiivinen.

Esimerkki 2

Laske.

$-\frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{-1}{5} = -\frac{1}{5}$

Kun murtoluku on negatiivinen, miinusmerkki laitetaan osoittajaan tai murtoluvun eteen.

Tehtävät

H1. Laske. Vastaus supistettuna sekalukuna.
- a) $\frac{2}{4} + \frac{2}{3}$
- b) $\frac{3}{5} + \frac{4}{6}$
- c) $\frac{2}{8} + \frac{3}{4}$
- d) $\frac{3}{7} + \frac{1}{5}$

H2. Laske ja supista.
- a) $\frac{2}{5} - \frac{2}{3}$
- b) $\frac{3}{7} - \frac{3}{6}$
- c) $\frac{2}{8} - \frac{2}{3}$
- d) $\frac{3}{7} - \frac{2}{3}$

H3. Laske.
- a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$
- b) $\frac{3}{7} + \frac{5}{6}$
- c) $\frac{4}{6} + \frac{2}{5}$
- d) $\frac{2}{5} + \frac{7}{8}$

H4. Laske.
- a) $\frac{2}{3} - \frac{4}{6}$
- b) $\frac{3}{8} - \frac{3}{6}$

c) $\frac{4}{2} - \frac{5}{5}$
d) $\frac{2}{3} - \frac{5}{8}$

Valinnanpaikka

H5. Laske.
a) $\frac{3}{5} - \frac{5}{7}$
b) $\frac{2}{3} - \frac{4}{9}$
c) $\frac{3}{6} + \frac{2}{7}$
d) $\frac{2}{3} + \frac{5}{7}$

H6. Laske.
a) $\frac{3}{5} + \frac{5}{7}$
b) $\frac{2}{3} + \frac{4}{9}$
c) $\frac{3}{6} - \frac{2}{7}$
d) $\frac{2}{3} - \frac{5}{7}$

MA156 Kulta (*T)

Erinimisten murtolukujen lasku helpottuu huomattavasti, kun aluksi jokainen luku kerrotaan pyj:llä ja lopullinen vastaus jaetaan pyj:llä.

Pienin yhteinen jaettava pyj

Pyj on pienin kokonaisluku, joka on tasan jaollinen kyseessä olevilla luvuilla.

Pyj monikertojen avulla

Pyj on pienin sellainen luku, joka on kaikkien lukujen monikerta.

Esimerkki 1

Etsi lukujen 12 ja 8 pyj.

Kertotaulussa on luvun monikerrat.

$12, 24, 36, 48$

$8, 16, 24$

Luku 24 on pienin luku, joka löytyy molemmista monikerroista, joten se on pyj. Merkitään pyj$(12, 8) = 24$

Pyj alkulukutekijöiden avulla

Etsitään alkulukutekijät "juurimallilla". Alkulukutekijät kerrotaan keskenään siten että luvuista otetaan aina vain suurin määrä alkulukutekijöitä kertolaskuun.

Esimerkki 2

Etsi pyj$(24, 18)$

$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \leftarrow$ suurin määrä alkulukutekijää 2.
$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \leftarrow$ suurin määrä alkulukutekijää 3.

Pyj lasketaan $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$

Pyj$(24, 18) = 72$.

Esimerkki 3

Laske $\frac{2}{5} + \frac{2}{4} + \frac{5}{6}$.

Etsitään nimittäjien pienin yhteinen tekijä pyj$(5, 4, 6)$ alkulukutekijöiden avulla.

$5 = 5 \cdot 1 \leftarrow$ suurin määrä alkulukutekijää 5
$4 = 2 \cdot 2 \leftarrow$ suurin määrä alkulukutekijää 2.
$6 = 2 \cdot 3 \leftarrow$ suurin määrä alkulukutekijää 3.

Pyj$(5, 4, 6) = 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 60$

Kerrotaan jokainen murtoluku luvulla 60.

$60 \cdot \frac{2}{5} + 60 \cdot \frac{2}{4} + 60 \cdot \frac{5}{6}$

Kokonaisluku kerrotaan murtoluvun osoittajan kanssa. Murtoluvut supistuvat kokonaisluvuiksi (jakolasku menee tasan).

$\frac{120}{5} + \frac{120}{4} + \frac{360}{6} = 24 + 30 + 60 = 114$

Saatu tulos jaetaan luvulla 60 ja supistetaan.

$\frac{114}{60} = \frac{57}{30} = \frac{19}{10}$

Näin on saatu vastaus

$\frac{2}{5} + \frac{2}{4} + \frac{5}{6} = \frac{19}{10}$

Esimerkki 4

Laske.

$\frac{2}{5} - \frac{2}{3} + \frac{3}{5}$

Heti ei kannata lähteä etsimään pyj:tä. Lasku kannattaa laskea usein osissa.

$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} - \frac{2}{3}$

$= \frac{5}{5} - \frac{2}{3}$

$= 1 - \frac{2}{3}$

$= \frac{1}{3}$

Tehtävät

K1. Laske ja supista.
- a) $\frac{2}{5} - \frac{2}{3} + \frac{3}{5}$
- b) $\frac{3}{7} - \frac{3}{6} + \frac{3}{7}$
- c) $\frac{2}{8} - \frac{2}{3} + \frac{2}{8}$
- d) $\frac{3}{7} - \frac{2}{3} - \frac{3}{7}$

K2. Laske ja supista.
- a) $\frac{1}{3} + \frac{2}{6} + \frac{2}{9}$
- b) $\frac{2}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2}$
- c) $\frac{4}{12} + \frac{3}{6} + \frac{2}{3}$
- d) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{2}{8}$

K3. a) Aseta luvut $\frac{2}{5}, \frac{5}{2}, \frac{4}{4}, \frac{7}{10}$ ja 1 järjestykseen pienimmästä alkaen.
b) Keksi jokin luku joka sijoittuu lukujen $\frac{3}{5}$ ja $\frac{3}{6}$ väliin?

c) Merkitse luvut lukusuoralle $0,5; \frac{4}{2}; 0,7; \frac{2}{10}; 3$.

d) Kuinka paljon jää kahden ja puolen litran limsapullosta jäljelle, kun Mari juo 1/3 litraa, Hanne 4/12 litraa ja Minttu 3/9 litraa?

K4. a) Keijo, Seppo ja Marko jakoivat 1240 euron lottopotin poikien panostuksen mukaisesti. Kuinka paljon kukin sai voitosta, kun Keijo maksoi puolet, Seppo 3/10 ja Marko 2/10 lottokupongin maksusta?

b) Luokassa 1/6 osaa oppilaista halusi lähteä luokkaretkellä Rokualle, 1/4 halusi lähteä Hailuotoon ja 1/2 halusi lähteä Kajaaniin. Kuinka suuri osa oppilaista ei halunnut lähteä minnekkään?

K5. Kaverukset Liisa, Mari ja Anni jakoivat 500 seuraavasti: Liisa sai $\frac{1}{5}$ Mari $\frac{2}{7}$ ja Anni loput.

a) Kuinka suuren osan Anni sai (murtoluku)?

d) Kuinka paljon rahaa Anni sai?

K6. Sievennä.

a) $1/3 + 2/6 + 2/9 - 5/6 + 2/9$

b) $\frac{2}{4} - (\frac{1}{8}) + \frac{-3}{8} + \frac{2}{4} + \frac{1}{2}$

c) $4/12 + 3/6 + 2/3 - (3/15–3/5) + 3/6$

d) $\frac{1}{2}–(\frac{1}{4}–\frac{2}{8}) - \frac{2}{20} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5}$

K7. a) Keijo, Seppo ja Marko jakoivat 200 euron lottopotin. Kuinka paljon kukin sai voitosta, kun Keijo maksoi puolet, Seppo $\frac{2}{5}$ ja Marko $\frac{1}{10}$ lottokupongin maksusta?

b) Luokassa $\frac{1}{7}$ osaa oppilaista halusi hampurilaisia, $\frac{3}{8}$ halusi tacoja ja $\frac{3}{7}$ pizzaa. Kuinka suuri oppilasmäärä ei äänestänyt?

c) Kaverukset Liisa, Maiju ja Annika jakoivat 130 euroa seuraavasti: Liisa sai $\frac{4}{7}$, Maiju $\frac{2}{8}$ ja Anni loput. Kuinka paljon rahaa kukin sai?

K8. Laske.

a) $2/9 + 1/3 + 1/6 - 2/9 + 1/3 + 1/6$

b) $5/10–2/5 + 2/20 + 3/8 + 2/4 + 1/2$

c) $3/8 + 2/4 + 1/2 + 1/3 + 2/6 + 2/9 - 5/6 + 2/9$

d) $2/30 + 5/15 + 2/5 - 2/20 + 1/10 + 1/5$

e) $3/15–3/5 + 3/6 + 2/30 + 5/15 + 2/5$

f) $2/20 + 1/10 + 1/5–3/5 + 3/6 + 2/30$

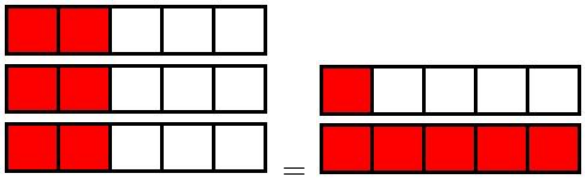
MA157 Murtolukujen kertolasku A, B ja C

Murtoluvun kertominen kokonaisluvulla

Kertolasku on lyhempi tapa ilmoittaa yhteenlasku.

$3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$

Kuvissa kolme kertaa kolme viidesosa, mikä on sievennettynä yksi kokonainen ja yksi viidesosa.



Kokonaisluku (a) kerrotaan vain osoittajan (b) kanssa $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$, kun $c \neq 0$

Osan ottaminen luvusta

Esimerkki 1

Laske luvusta 21 kolme seitsemäsosaa.

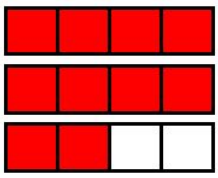
$21 \cdot \frac{3}{7} = \frac{21 \cdot 3}{7} = \frac{63}{7} = 9$

Murtoluvun osoittaja kerrotaan kokonaisluvulla.

Laskun voidaan merkitä toisin päin $\frac{3}{7} \cdot 21$, jolloin tehtävä on muotoa, laske kolme seitsemäsosaa luvusta 21.

Sekaluvun ja murtoluvun kertolaskun ero

Sekaluku

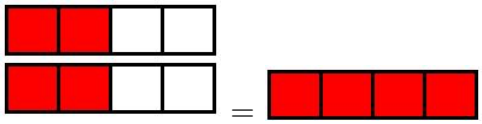


Kaksi kokonaista ja kaksi neljäsosaa, eli kymmenen neljäsosaa.

$2\frac{2}{4} = \frac{8}{4} + \frac{2}{4} = \frac{10}{4}$

Kertolasku

Kuvassa kaksi kertaa kaksi neljäsosaa, eli neljä neljäsosaa.



$2 \cdot \frac{2}{4} = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{4}{4} = 1$

Ymmärrä kertolaskun ja sekaluvun ero. Kertolaskuissa oltava aina kertomerkki, muuten kyseessä on sekaluku.

Kahden murtoluvun tulo

Kahden murtoluvun kertolaskussa nimittäjät kerrotaan keskenään ja osoittajat kerrotaan keskenään.
Yleinen kaava

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, missä b ja $d \neq 0$.

ac ja bd kirjainten välissä on kertomerkki, jota ei tarvitse merkitä.

Esimerkki 2

Laske $\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{3}$

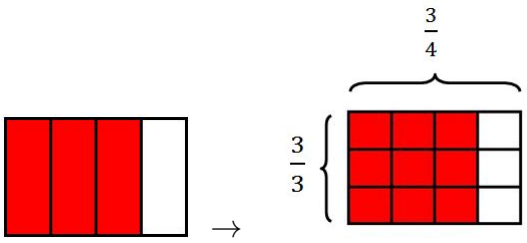
Murtoluvulla murtolukua kerrottaessa nimittäjän ja osoittajan arvo muuttuu.

$\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{6 \cdot 3} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$

Esimerkki 3

Muodosta kuvista kertolasku ja laske.

a) Alkuperäinen luku $\frac{3}{4}$

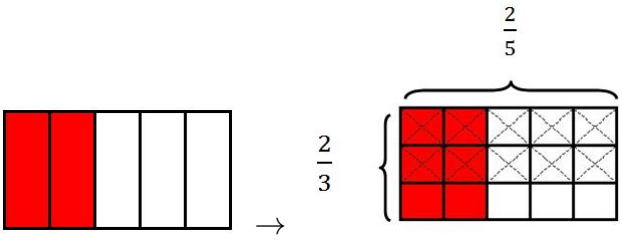


Alkuperäisessä luvussa on kolme neljäsosaa punaisia laatikoita. Jaetaan laatikko vaakasuunnassa kolmeen osaan ja otetaan kaikki osat mukaan. Osoittajaan tulee kaikki punaiset ruudut ja nimittäjään tulee kaikki ruudut.

Kertolaskuksi saadaan

$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{3} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

b) Alkuperäinen luku $\frac{2}{5}$



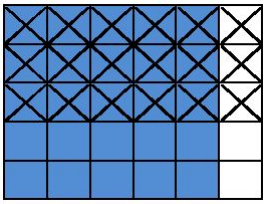
Alkuperäisessä luvussa on punaisia laatikoita kaksi viidesosaa. Kerrotaan luku kaksi kolmasosalla, jollon pystytasossa laatikko jaetaan kolmeen osaan ja kahteen niistä laitetaan x:t. Vastauksen osoittajaan tulee ne ruudut, joissa on punaista sekä x, ja nimittäjään tulee kaikki ruudut.

Kertolaskuksi saadaan

$\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$

Osia on yhteensä 15, ja kyseessä on neljä osaa, eli kaikki ne osat, joissa on ”ruksi”sekä punainen tausta.

c)



Kertolaskuksi saadaan

$\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$

Kertolaskun osoittajaan tulee kaikki ruudut, jotka ovat sinisiä ja sisältävät x:n. Nimittäjään tulee kaikki ruudut.

MUISTA AINA SUPISTAA VASTAUS!

MA157 Pronssi

P1. Laske.
- a) $2 \cdot \frac{1}{4}$
- b) $4 \cdot \frac{4}{6}$
- c) $(\frac{3}{6}) \cdot 7$
- d) $(\frac{1}{6}) \cdot 9$

P2. Laske.
- a) $\frac{2}{6} \cdot \frac{4}{9}$
- b) $\frac{6}{9} \cdot \frac{2}{6}$
- c) $\frac{2}{5} \cdot \frac{6}{8}$
- d) $\frac{2}{6} \cdot \frac{5}{6}$

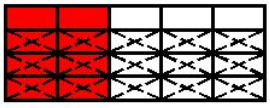
P3. Laske.
- a) $\frac{2}{4} \cdot \frac{4}{2}$
- b) $\frac{7}{9} \cdot \frac{4}{7}$
- c) $\frac{4}{8} \cdot \frac{7}{4}$
- d) $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}$

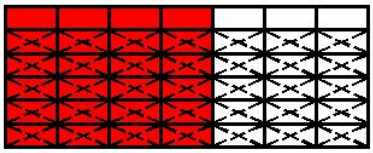
P4. Laske. Ilmoita vastaus murtolukuna.
- a) $\frac{2}{4} + \frac{3}{4}$
- b) $\frac{1}{7} - \frac{4}{7}$
- c) $\frac{5}{8} + \frac{3}{4}$
- d) $\frac{3}{5} - \frac{2}{3}$

P5. Laske. Ilmoita vastaus murtolukuna.

a) $3\frac{2}{4}$
b) $3 \cdot \frac{2}{4}$
c) $\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{7}$
d) $\frac{3}{5} + \frac{2}{3}$

P6. Muodosta kuvasta kertolasku ja laske.

a) 

b) 

Valinnanpaikka

P7. Laske. Ilmoita vastaus murtolukuna.

a) $\frac{2}{6} \cdot \frac{4}{4}$
b) $\frac{2}{9} \cdot \frac{2}{3}$
c) $\frac{1}{8} \cdot \frac{4}{5}$
d) $\frac{3}{6} \cdot \frac{1}{4}$

P8. Laske. Ilmoita vastaus murtolukuna.

a) $\frac{2}{6} + \frac{4}{6}$
b) $\frac{5}{7} - \frac{2}{7}$
c) $\frac{1}{6} + \frac{3}{2}$
d) $\frac{3}{4} + \frac{1}{3}$

MA157 Hopea (*T)

Laskemista voidaan helpottaa supistamalla nimittäjästä ja osoittajasta samat luvut.

Esimerkki 1

$\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{2}$

Osoittajassa ja nimittäjässä on luku 2. Supistetaan.
$= \frac{\cancel{2} \cdot 6}{3 \cdot \cancel{2}} = \frac{6}{3}$

Luku 6 voidaan esittää tulomuodossa $2 \cdot 3$. Tämän jälkeen voidaan supistaa luku 3.

$= \frac{\cancel{3} \cdot 2}{\cancel{3}} = \frac{2}{1} = 2.$

Jaollisuus

Luku on jaollinen luvulla

- kaksi (2), jos luvun viimeinen numero on parillinen
- kolmella (3), jos luvun numeroiden summa on kolmella jaollinen
$222 \rightarrow 2+2+2 = 6$ ja $\frac{6}{3} = 2$, joten luku 222 on jaollinen kolmella $\rightarrow \frac{222}{3} = 74$
- viisi (5), jos luvun viimeinen numero on 5 tai 10.

Esimerkki 2

$\frac{28}{5} \cdot \frac{15}{6} = \frac{28 \cdot 15}{5 \cdot 6}$

Hajoitetaan luvut tekijoihin seuraavasti $28 = 2 \cdot 14, 15 = 3 \cdot 5$ ja $6 = 2 \cdot 3$ ja supistetaan kaikki mahdollinen.

$= \frac{\cancel{2} \cdot 14 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}} = \frac{14}{1} = 14.$

Laskujärjestys ja merkkisäännöt

Laskuissa on muistettava laskujärjestys ja tulon merkkisäännöt.

Merkkisäännöt

$- \cdot - \rightarrow +$
$+ \cdot + \rightarrow +$
$- \cdot + \rightarrow -$
$+ \cdot - \rightarrow -$

Laskujärjestys

- sulkeet
- kerto- ja jakolaskut

- yhteen- ja vähennyslaskut

Esimerkki 3

$\frac{2}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3}$

Lasketaan kertolasku.

$= \frac{2}{3} + \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 3}$
$= \frac{2}{3} + \frac{4}{15}$

Lavennetaan nimittäjät samannimisiksi.

$= \frac{6}{15} + \frac{4}{15}$

Sienennetään.

$= \frac{9}{15}$

Esimerkki 4

$\frac{-3}{7} \cdot \frac{-4}{6}$

Kaksi negatiivista kerrottavaa, jolloin vastaus on positiivinen.

$= \frac{12}{42} = \frac{6}{21}$

Tehtävät

H1. Laske. Muista merkitä alkuperäinen lauseke.

a) $\frac{2}{8} \cdot \frac{3}{4}$
b) $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{8}$
c) $\frac{7}{9} \cdot \frac{5}{8}$
d) $\frac{6}{8} \cdot \frac{5}{6}$

H2. Laske. Muista merkitä alkuperäinen lauseke.

a) $\frac{4}{8} \cdot \frac{1}{4}$
b) $\frac{3}{9} \cdot \frac{2}{3}$
c) $\frac{7}{9} \cdot \frac{5}{7}$
d) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{9}$

H3. Laske. Muista merkitä alkuperäinen lauseke.

a) $8 \cdot \frac{3}{4}$
b) $\frac{3}{4} \cdot 8$
c) $\frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8}$
d) $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{6}$

H4. Laske. Muista merkitä alkuperäinen lauseke.

a) $-\frac{2}{7} \cdot (-\frac{2}{5})$
b) $-\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8}$
c) $-9 \cdot (-\frac{5}{8})$
d) $-\frac{3}{4} \cdot (-\frac{5}{6})$

Valinnanpaikka

H5. Laske.

a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{9}$
b) $\frac{6}{9} \cdot 2$
c) $2 \cdot \frac{6}{8}$
d) $2\frac{5}{6}$

H6. Laske.

a) $\frac{5}{7} \cdot (\frac{4}{9})$
b) $-9 \cdot \frac{3}{5}$
c) $-\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7}$
d) $\frac{-2}{5} \cdot \frac{-4}{6}$

H7. Laske.

a) $\frac{2}{4} - \frac{4}{2}$
b) $\frac{7}{9} - \frac{4}{7}$
c) $\frac{4}{8} \cdot \frac{7}{5}$
d) $5\frac{2}{3}$

MA157 Kulta (*T)

Laske pitkä lasku vaiheittain.

Esimerkki 1

$2\frac{3}{7} - \frac{3}{8} \cdot \frac{-2}{3} + 2(\frac{5}{6} - \frac{5}{12})$

Muistetaan laskujärjestys. Muunnetaan sekaluku murtoluvuksi. Kerrotaan

murtolukujen kertolasku (huomioidaan etumerkit) ja lavennetaan yhteenlaskettavat samannimisiksi.

$\frac{14+3}{7} + \frac{\cancel{3}}{8} \cdot \frac{2}{\cancel{3}} + 2(\frac{10}{12} - \frac{5}{12})$
$= \frac{17}{7} + \frac{1}{4 \cdot \cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{1} + 2 \cdot \frac{-5}{12}$
$= \frac{17}{7} + \frac{1}{4} - \frac{10}{12}$

Lavennetaan $\frac{1}{4}$ kolmella.
$= \frac{17}{7} + \frac{3}{12} - \frac{10}{12}$

Sievennetään.

$= \frac{17}{7} - \frac{7}{12}$

Lavennetaan ristiin.

$= \frac{204}{84} - \frac{49}{84}$
$= \frac{155}{84} = 1\frac{71}{84}$

Esimerkki 2

Supista aina kun se on mahdollista. Näin luvut pysyy pienenä.

$\frac{4}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4}$

Supistetaan kaikkia mahdolllinen.

$= \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}$

Lasketaan yhteen samannimiset murtoluvut ja kerrotaan kertolaskut.

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$
$= \frac{2}{4} + \frac{1}{3}$
$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$
$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6}$
$= \frac{5}{6}$

Tehtävät

K1. Laske.
a) $\frac{4}{8} + \frac{1}{4}$

b) $\frac{2}{9} \cdot (\frac{2}{3})$
c) $9 \cdot \frac{5}{7}$
d) $3\frac{3}{9}$

K2. Laske.
a) $\frac{4}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4}$
b) $\frac{3}{9} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6}$
c) $\frac{7}{9} \cdot \frac{5}{7} + \frac{2}{5} - \frac{7}{8}$
d) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{9} - \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5}$

K3. Laske.
a) $(\frac{1}{4})^2$
b) $\frac{4^2}{7}$
c) $-(\frac{6}{8})^2$
d) $(\frac{1}{4})^3$

K4. Laske.
a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2}$
b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$
c) $\frac{-2}{3} \cdot \frac{-3}{14} \cdot \frac{2}{4}$
d) $\frac{3}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot (-\frac{3}{4})$

K5. Laske.
a) Kolme kuudesosaa luvusta 6.
b) Kaksi yhdeksäsosaa luvusta 2/6.
c) Suorakulmion kanta on 3/7 m ja korkeus 4/5 m. Laske suorakulmion pinta-ala ja piirin pituus.
d) Kolme kokonaista ja kaksi viidesosaa kerrottuna kolmella.

MA158 Murtolukujen jakolasku A, B ja C

Johdanto

Johdannossa perusteltu murtolukujen jakolaskuja. Jos asia tuntuu haastavalta, niin siitä ei tarvitse olla huolissaan. Murtolukujen jakolaskujen osalta on tärkeintä oppia miten laskut lasketaan. Laatikkoesimerkkien ymmärtäminen on syventävää tietoa. Lue johdanto kuitenkin huolella.

Käsitteitä

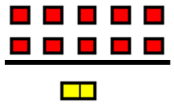
Jakolasku $\frac{c}{b} = a$ on ositusjako, jos luku c ajatellaan jaettavaksi b yhtä suureen osaan. Osamäärä on jakolaskun vastaus. Vastaus ei mene aina tasan.

$$\frac{\text{jaettava} \quad c}{\text{jakaja} \quad b} = \text{osamäärä} \quad a$$

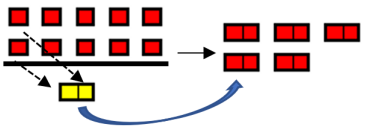
Murtolukujen laskutikkuesimerkeissä on käytetty sopivia määriä pikkulaatikoita hahmottamisen parantamiseksi. Kun vastaus supistetaan, niin saadaan sievempi vastaus.

Esimerkki 1

Jaetaan kymmen 10 kokonaista kahdella 2 kokonaisella.

$\frac{10}{2} =$ 

Vastaus saadaan, kun tutkiaan kuinka monta kertaa punaiset 10 kpl palikat mahtuvat keltaiseen palikoiden päälle.

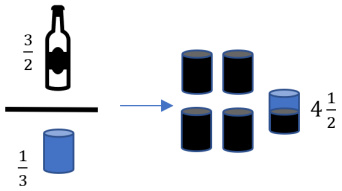
$\frac{10}{2} =$  $= 5$

Punaiset palikat menevät keltaisen palikoiden päälle tasan 5 kertaa. Osamäärä on 5.

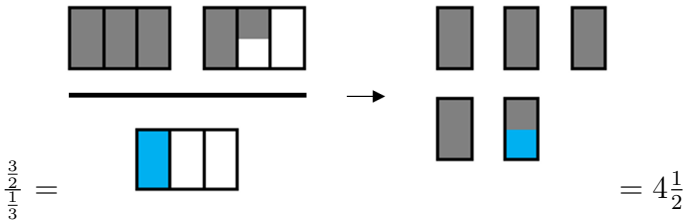
Esimerkki 2

Kuinka monta 0,33 litran tölkkiä saadaan 1,5 litran pullosta?

$0,33 = \frac{1}{3}$ ja $1,5 = \frac{3}{2}$. Kaadetaan pullon sisältö tölkkiin. Saadaan $4\frac{1}{2}$ tölkkiä.



Sama lasku laskutikkuesimerkillä.



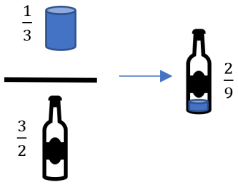
Jakajan nimittäjä on kokonaisuus (iso laatikko). Jakajan osoittaja kertoo kuinka iso osa laatikosta väritetään sinisellä $\frac{1}{3}$.

Jaettavaan väritetään laatikosta harmaalla osoittajan osoittama osuus $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ (yksi ja puoli laatikkoa).

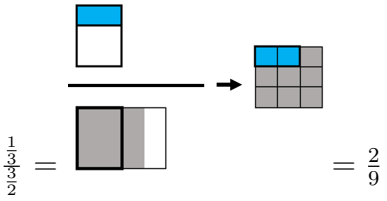
Vastaus saadaan, kun tutkitaan, kuinka monta kertaa jaettavan harmaa alue mahtuu jakajan siniseen alueeseen. Vastaus neljä kertaa ja puoli kertaa $4\frac{1}{2}$.

Esimerkki 3

Kuinka suuren osan 0,33 litran tölkki täytää 1,5 litran pullosta?



Sama laskutikkuesimerkkinä.



Jakajan nimittäjä on kokonaisuus (iso tummennettu laatikko). Jakajan osoittaja kertoo kuinka iso osa laatikosta väritetään harmaalla $\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ (yksi ja puoli laatikkoa).

Jaettavaan väritetään laatikosta sinisellä osoittajan osoittama osuus $\frac{1}{3}$.

Vastaus saadaan, kun tutkitaan, kuinka monta kertaa jaettavan sininen alue mahtuu jakajan harmaaseen alueeseen. Vastaus $\frac{2}{9}$.

Johdanto loppu.

Murtolukujen jakolasku

Käsitteitä

Jakolaskuissa osoittajassa on jaettava ja nimittäjässä on jakaja. Jakolaskun vastaus on osamäärä.

$$\frac{\text{jaettava } (c)}{\text{jakaja } (b)} = \text{osamäärä } (a)$$

Jakolasku $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ merkitään yleensä muodossa

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$$

Murtolukujen jakolasku lasketaan siten että jaettava kerrotaan jakajan käänteisluvulla.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

, missä b, c ja $d \neq 0$.

Esimerkki 2

Laske a) $\frac{1}{3} : \frac{1}{2}$ b) $\frac{4}{7} : \frac{2}{5}$.

Jakolasku muutetaan kertolaskuksi ja samalla jakaja (nimittäjä) "kiepsahtaa"ylösalaisin.

a) $\frac{1}{3} : \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{3}$.

b) $\frac{4}{7} : \frac{2}{5} = \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{2} = \frac{20}{14} = \frac{10}{7}$

Käänteisluku

"Kiepsahtaminen"on luvun käänteisluvun ottamista. Luvun $\frac{1}{2}$ käänteisluku on $\frac{2}{1}$.

Luvun ja sen käänteisluvun tulo on aina 1.

Esimerkki 3

$\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{1} = 1$

$\frac{\cancel{4}}{\cancel{9}} \cdot \frac{\cancel{9}}{\cancel{4}} = 1$

Murtoluvun jakaminen kokonaisluvulla

Jokainen kokonaisluku voidaan muuttaa murtoluvuksi, jakamalla kokonaisluku yhdellä.

Esimerkki 4

Ilmoita luku $7, 100$ ja -8 murtolukuna.

a) $7 = \frac{7}{1}$

b) $100 = \frac{100}{1}$

c) $-8 = \frac{-8}{1}$

Esimerkki 5

Laske a) $\frac{1}{3} : 2$ b) $3 : \frac{4}{7}$.

Muutetaan kokonaisluku murtoluvuksi ja lasketaan murtolukujen jakolasku. Jakolasku lasketaan muuttamalla lasku kertolaskuksi "kiepsauttamalla"jakaja.

a) Luku 2 on murtolukuna $\frac{2}{1}$, joten

$\frac{1}{3} : \frac{2}{1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

b) Luku 3 on murtolukuna $\frac{3}{1}$, joten

$\frac{3}{1} : \frac{4}{7} = \frac{3}{1} \cdot \frac{7}{4} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$

MA158 Pronssi

P1. Laske.
- a) $\frac{2}{4} : 2$
- b) $\frac{4}{8} : 2$
- c) $\frac{6}{9} : 2$
- d) $\frac{16}{28} : 2$

P2. Laske.
- a) $\frac{2}{8} : 6$
- b) $\frac{3}{12} : 8$
- c) $\frac{6}{7} : 3$
- d) $\frac{2}{28} : 4$

P3. Laske.
- a) $\frac{3}{5} : \frac{3}{5}$
- b) $\frac{4}{9} \cdot \frac{9}{7}$
- c) $\frac{3}{9} : \frac{4}{8}$
- d) $\frac{3}{5} \cdot \frac{9}{2}$

P4. Laske.
- a) $\frac{5}{8} : \frac{2}{6}$
- b) $\frac{2}{9} \cdot \frac{8}{7}$
- c) $\frac{1}{9} : \frac{4}{7}$

d) $\frac{3}{5} \cdot \frac{9}{8}$

Valinnanpaikka

P5. Laske.
a) $\frac{3}{9} : \frac{6}{9}$
b) $\frac{2}{6} : \frac{5}{6}$
c) $\frac{4}{6} : \frac{2}{9}$
d) $\frac{2}{7} : \frac{6}{7}$

P6. Laske.
a) $\frac{2}{5} : \frac{7}{9}$
b) $\frac{2}{5} : \frac{5}{9}$
c) $\frac{2}{8} : \frac{1}{8}$
d) $\frac{2}{5} : \frac{4}{9}$

P7. Laske.
a) $\frac{2}{4} : \frac{5}{8}$
b) $\frac{1}{4} : \frac{5}{7}$
c) $\frac{2}{4} : \frac{7}{8}$
d) $\frac{2}{6} : \frac{4}{9}$

MA158 Hopea (*T)

Jakaja ja jaettava voivat olla murtolukuja, sekalukuja, kokonaislukuja tai desimaalilukuja.

Esimerkki 1

a) Murtoluku jaettuna kokonaisluvulla.

$\frac{a}{b} : c$

b) Kokonaisluku jaettuna murtoluvulla.

$c : \frac{a}{b}$

c) Desimaaluku jaettuna murtoluvulla.

$0,3 : \frac{a}{b}$

d) Sekaluku jaettuna murtoluvulla.

$a\frac{b}{c} : \frac{d}{e}$

Esimerkki 2

Laske a) $0,3 : \frac{5}{8}$ b) $1\frac{2}{5} : \frac{5}{8}$ c) $0,04 : 1\frac{5}{8}$.

a) $0,3$ on kolme kymmenesosaa, eli $\frac{3}{10}$.

$0,3 : \frac{5}{8} = \frac{3}{10} \cdot \frac{8}{5} = \frac{24}{50} = \frac{12}{27}$

b) Sekaluku $1\frac{2}{5}$ on murtolukuna $\frac{7}{5}$.

$\frac{7}{5} : \frac{5}{8} = \frac{7}{5} \cdot \frac{8}{5} = \frac{56}{25} = 2\frac{6}{25}$

c) $0,04$ on neljä sadasosaa, eli $\frac{4}{100}$. Sekaluku $1\frac{5}{8}$ on murtolukuna $\frac{13}{8}$.

$0,04 : 1\frac{5}{8} = \frac{4}{100} : \frac{13}{8} = \frac{4}{100} \cdot \frac{8}{13} = \frac{32}{1300} = \frac{8}{375}$

Tehtävät

H1. Laske.
- a) $\frac{5}{7} : \frac{1}{6}$
- b) $\frac{2}{8} : \frac{6}{8}$
- c) $\frac{1}{5} \cdot \frac{7}{4}$
- d) $\frac{3}{2} : \frac{6}{9}$
- e) $0,6 : \frac{3}{4}$

H2. Laske.
- a) $\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{6}$
- b) $\frac{2}{9} \cdot \frac{7}{8}$
- c) $\frac{1}{9} : \frac{7}{4}$
- d) $\frac{3}{5} \cdot \frac{8}{9}$
- e) $2\frac{1}{3} \cdot 0,6$

H3. Laske.
- a) $\frac{2}{5} + \frac{2}{5}$
- b) $\frac{2}{9} - \frac{3}{9}$
- c) $\frac{3}{8} + \frac{2}{8}$

d) $\frac{4}{6} - \frac{5}{6}$

H4. Laske.
a) $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{3} + \frac{4}{6}$
c) $\frac{2}{6} + \frac{3}{4}$
d) $\frac{3}{10} + \frac{1}{5}$

H5. Laske.
a) $\frac{2}{4} \cdot \frac{5}{8}$
b) $\frac{1}{4} : \frac{7}{5}$
c) $\frac{2}{4} \cdot \frac{7}{8}$
d) $\frac{2}{6} \cdot \frac{4}{9}$
e) $\frac{2}{7} : 0,06$
f) $3\frac{2}{5} : 1,4$

Valinnanpaikka

H6. Laske.
a) $\frac{2}{8} \cdot \frac{1}{8}$
b) $\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{9}$
c) $\frac{2}{9} + \frac{4}{9}$
d) $\frac{12}{25} + \frac{3}{24}$

H7. Laske.
a) $\frac{3}{9} + \frac{4}{9}$
b) $\frac{2}{4} - \frac{7}{4}$
c) $\frac{2}{3} - \frac{1}{3}$
d) $\frac{4}{8} + \frac{3}{8}$

MA158 Kulta (*T)

Johdanto

Murtolukujen laskuesimerkeissä on käytetty sopivia määriä pikkulaatikoita hahmottamisen parantamiseksi. Kun vastaus supistetaan, niin saadaan sievempi vastaus.

Esimerkki 1

Jaa neljä neljäsosa yhdellä neljäsosalla, eli $\frac{\frac{4}{4}}{\frac{1}{4}}$.

Aluksi piirretään jakaja ja sen avulla jaettava. Jakajan nimittäjä määrittelee kokonaisuuden (ison laatikon ääriviivat). Jaettavan ja jakajan isot laatikot ovat aina samankokoisia.

$\frac{\frac{4}{4}}{\frac{1}{4}} =$ $= 4.$

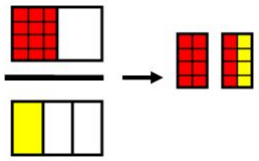
Jakajan $\frac{1}{4}$ nimittäjä 4 on kokonaisuus (iso laatikko). Jakajan osoittaja kertoo kuinka iso osa laatikosta väritetään keltaisella 1.

Jaettavaan väritetään isosta laatikosta punaisella osoittajan osoittama osuus $\frac{4}{4}$.

Vastaus saadaan, kun tutkitaan, kuinka monta kertaa jaettavan punainen alue mahtuu jakajan keltaiseen alueeseen. Vastaus neljä kertaa 4. Punainen alue täyttää neljä keltaista aluetta.

Esimerkki 2

Jaa $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$.

$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} =$  $= 1\frac{4}{8}.$

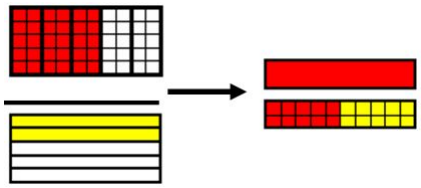
Jakajan nimittäjä on kokonaisuus 3 (iso laatikko). Jakajan osoittaja kertoo, kuinka iso osa laatikosta väritetään keltaisella 1 (keltaisella).

Jaettavaan väritetään isosta laatikosta punaisella jaettavan osuus $\frac{1}{2}$.

Vastaus saadaan, kun tutkitaan, kuinka monta kertaa jaettavan punainen alue mahtuu jakajan keltaiseen alueeseen. Vastaus yksi ja puoli kertaa $1\frac{4}{8} = 1\frac{1}{2}$. Punainen alue täyttää yhden ja puoli keltaista aluetta.

Esimerkki 3

Laske tutkimalla $\frac{3}{5} : \frac{2}{5}$.

$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{5}} =$  $= 1\frac{10}{20}$

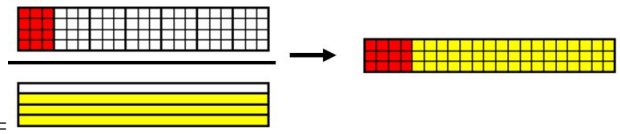
Jakajan $\frac{2}{5}$ nimittäjä on iso laatikko 5. Jakajan osoittaja kertoo, kuinka iso osa laatikosta väritetään keltaisella 2.

Jaettavaan väritetään isosta laatikosta punaisella jaettavan osittama osuus $\frac{3}{5}$.

Vastaus saadaan, kun tutkitaan, kuinka monta kertaa jaettavan punainen alue mahtuu jakajan keltaiseen alueeseen. Vastaus yksi ja puoli kertaa $1\frac{10}{20} = 1\frac{1}{2}$.

Esimerkki 4

Laske $\frac{1}{7} : \frac{3}{4}$.

$\frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{4}} =$  $= 1\frac{8}{21}$

Jakajan $\frac{3}{4}$ nimittäjä on iso laatikko 4. Jakajan osoittaja kertoo, kuinka iso osa laatikosta väritetään keltaisella 3.

Jaettavaan väritetään isosta laatikosta punaisella osoittajan osittama määrä $\frac{1}{7}$.

Vastaus saadaan, kun tutkitaan, kuinka monta kertaa jaettavan punainen alue mahtuu jakajan keltaiseen alueeseen. Vastaus $\frac{12}{84} = \frac{4}{21}$.

Johdanto loppu.

Teoria

Laskujärjestys

- muunna kaikki luvut murtoluvuiksi
- sulkeet
- potenssilaskut
- kerto- ja jakolaskut
- yhteen- ja vähennyslaskut

Esimerkki 1

Laske.

$\frac{5}{7} : \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$

Muutetaan jakolasku kertolaskuksi.

$= \frac{5}{7} \cdot \frac{6}{1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$

Lasketaan kertolaskut.

$= \frac{30}{7} + \frac{1}{8}$

Ristiin laventamalla saadaan mimittäjät samannimisiksi.

$= \frac{240}{56} + \frac{7}{56}$

Sievennetään.

$= \frac{240+7}{56}$

$= \frac{247}{56}$

Muunnetaan murtoluku sekaluvuksi.

$= 4\frac{23}{56}$

Esimerkki 2

Laske.
$0,3 \cdot \frac{4}{7} + \frac{-5}{7} : \frac{2}{9} + 1\frac{2}{3} \cdot \frac{3-5}{2}$

- Lasketaan vähennyslasku $3 - 5 = -2$.

- $0,3$ on kolme kymmensosaa, eli $\frac{3}{10}$.

- Sekaluku $1\frac{2}{3}$ on murtolukuna $\frac{5}{3}$.

- Muutetaan jakolaskut kertolaskuiksi.

$\frac{3}{10} \cdot \frac{4}{7} + \frac{-5}{7} \cdot \frac{9}{2} + \frac{5}{3} \cdot \frac{-2}{2}$

Mietitään yhteiset tekijät.

$= \frac{3}{5 \cdot \cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2} \cdot 2}{7} + \frac{-5}{7} \cdot \frac{9}{2} + \frac{5}{3} \cdot \frac{-\cancel{2}}{\cancel{2}}$

Supistetaan kaikki yhteiset tekijät kertolaskuissa.

$= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} + \frac{-5}{7} \cdot \frac{9}{2} + \frac{5}{3} \cdot (-1)$

$= \frac{6}{35} - \frac{45}{14} - \frac{5}{3}$

Lasketaan lukujen pyj$(35, 14, 3)$ tai lavennellaan ristiin vaiheittain.

Selvitetään lukujen pyj$(35, 14, 3)$.

$35 = 7 \cdot 5 \leftarrow$ suurin määrä alkulukutekijää 7 ja 5
$14 = 7 \cdot 2 \leftarrow$ suurin määrä alkulukutekijää 2
$3 = 1 \cdot 3 \leftarrow$ suurin määrä alkulukutekijää 3

Lukujen pyj$(35, 14, 3) = 7 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 = 210$.

Kerrotaan luvut luvulla 210.

$210 \cdot \frac{6}{35} - 210 \cdot \frac{45}{14} - 210 \cdot \frac{5}{3}$

$= \frac{1260}{35} - \frac{9450}{14} - \frac{1050}{3}$

$= 36 - 675 - 350$

$= -989$

Muistetaan jakaa saatu vastaus pyj:llä $\frac{-989}{210} = -4\frac{149}{210}$.

Tehtävät

K1. Laske.

a) $\frac{5}{7} : \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$
b) $\frac{2}{8} : \frac{6}{8} - \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{3}$
c) $\frac{1}{5} : \frac{4}{7} + \frac{6}{8} \cdot \frac{3}{4}$
d) $\frac{3}{2} : \frac{6}{9} - \frac{7}{9} \cdot \frac{3}{7}$

K2. Laske.

a) $\frac{2}{3} : \frac{7}{8} - \frac{4}{8} \cdot \frac{5}{9}$
b) $\frac{1}{2} : \frac{2}{7} + \frac{8}{9} \cdot \frac{2}{4}$
c) $\frac{2}{3} : \frac{5}{8} + \frac{2}{8} \cdot \frac{3}{4}$
d) $\frac{2}{5} : \frac{3}{9} - \frac{6}{7} \cdot \frac{2}{7}$

K3. Laske.

a) $\frac{-4}{7} : \frac{1}{6} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{7}$
b) $\frac{-7}{8} : \frac{-4}{8} - \frac{5}{6} \cdot \frac{-2}{8}$
c) $\frac{-1}{4} : \frac{-3}{7} + \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{6}$
d) $\frac{5}{9} : \frac{-6}{7} - \frac{6}{9} \cdot \frac{-3}{7}$

K4. Laske.

a) $\frac{-2}{5} : \frac{-7}{9} - \frac{4}{8} \cdot \frac{5}{8}$
b) $\frac{1}{4} : \frac{-2}{7} + \frac{8}{9} \cdot \frac{-2}{6}$
c) $\frac{-2}{7} : \frac{-5}{5} + \frac{2}{8} \cdot \frac{3}{5}$
d) $\frac{2}{5} : \frac{3}{5} - \frac{6}{7} \cdot \frac{-2}{8}$
e) $\frac{-2}{8} : \frac{6}{7} - \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{6}$

MA159 Osan ottaminen luvusta, kokonaisuuden jakaminen osiin sekä sanalliset tehtävät A, B, C ja D

Helpota laskemista supistamalla ja sieventämällä.

Esimerkki 1

Laske $\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{2}$

Supistetaan molemmista murtoluvuista samat tekijät 7.

$\frac{3}{\cancel{7}} \cdot \frac{\cancel{7}}{2}$
$= \frac{3}{2}$
$= 1\frac{1}{2}$

Esimerkki 2

Laske.

$\frac{12}{56} \cdot \frac{14}{6}$

Hajoitetaan luvut tekijöihin seuraavasti.

$12 = 6 \cdot 2$
$56 = 7 \cdot 8$
$14 = 7 \cdot 2$
$6 = 3 \cdot 2$

Supistetaan kaikki mahdolliset.

$= \frac{\cancel{2}\cdot 6 \cdot \cancel{7}\cdot 2}{\cancel{7}\cdot 8 \cdot 3 \cdot \cancel{2}}$
$= \frac{6 \cdot 2}{8 \cdot 3}$

Edelleen voidaan hajoittaa luvut tekijöihin.

$6 = 3 \cdot 2$
$8 = 2 \cdot 4$

Supistetaan kaikki mahdolliset.

$= \frac{\cancel{3} \cdot 2 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot 4 \cdot \cancel{3}}$
$= \frac{2}{4}$
$= \frac{1}{2}$

Esimerkki 3

Laske.

$(\frac{8}{32} + \frac{3}{12}) \cdot \frac{32}{64}$
$= (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) \cdot \frac{1}{2}$
$= \frac{\cancel{2}}{4} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$
$= \frac{1}{4}$

Sanalliset tehtävät

Muista!

Summa on yhteenlasku (+).
Erotus on vähennyslasku (−).
Tulo on kertolasku (·).
Osamäärä on jakolasku (:).

Esimerkki 4

Laske

a) lukujen $\frac{3}{4}$ ja $\frac{1}{2}$ summa

$\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$
$= \frac{3}{4} + \frac{2}{4}$
$= \frac{5}{4}$
$= 1\frac{1}{4}$

b) lukujen $\frac{5}{6}$ ja $\frac{1}{3}$ erotus

$\frac{5}{6} - \frac{1}{3}$
$= \frac{5}{6} - \frac{2}{6}$
$= \frac{3}{6}$
$= \frac{1}{2}$

c) lukujen $\frac{-5}{7}$ ja $\frac{3}{4}$ tulo

$\frac{-5}{7} \cdot \frac{3}{4}$
$= -\frac{15}{32}$

d) lukujen $\frac{-5}{6}$ ja $\frac{1}{2}$ osamäärä

$\frac{-5}{6} : \frac{1}{2}$

Muutetaan jakolasku kertolaskuksi.

$= \frac{-5}{6} \cdot \frac{2}{1}$

Luku $6 = 2 \cdot 3$. Supistetaan.

$= \frac{-5}{\cancel{2} \cdot 3} \cdot \frac{\cancel{2}}{1}$
$= \frac{-5}{3}$
$= -1\frac{2}{3}$

e) luvun -7 ja $\frac{4}{5}$ tulo

Muunnetaan luku -7 murtoluvuksi $\frac{7}{1}$.

$\frac{-7}{1} \cdot \frac{4}{5}$
$= \frac{-28}{5}$
$= -5\frac{3}{5}$

f) luvun -9 ja $\frac{-3}{4}$ osamäärä.

Muunnetaan luku -9 murtoluvuksi $\frac{-9}{1}$.

$\frac{-9}{1} : \frac{-3}{4}$

Muunnetaan jakolasku kertolaskuksi ja muistetaan merkkisääntö $- \cdot - \to +$.

$= \frac{9}{1} \cdot \frac{4}{3}$

Luku $9 = 3 \cdot 3$. Supistetaan.

$= \frac{\cancel{3}\cdot 3}{1} \cdot \frac{4}{\cancel{3}}$
$= \frac{12}{3}$
$= 12$

MA159 Pronssi

P1. Merkitse ja laske
- a) lukujen $\frac{2}{3}$ ja $\frac{1}{2}$ summa
- b) lukujen $\frac{2}{3}$ ja $\frac{1}{2}$ tulo
- c) lukujen $\frac{2}{3}$ ja $\frac{1}{2}$ osamäärä
- d) lukujen $\frac{2}{3}$ ja $\frac{1}{2}$ erotus.

P2. Laske, kun murtoluku $\frac{3}{4}$
- a) kerrotaan luvulla $\frac{4}{5}$
- b) jaetaan luvulla $\frac{3}{4}$
- c) jaetaan luvulla 3
- d) kerrotaan luvulla 7.

P3. Laske.
- a) $\frac{-1}{9} \cdot \frac{9}{1}$
- b) $\frac{-6}{7} \cdot \frac{-7}{6}$
- c) $\frac{14}{5} : \frac{-14}{5}$
- d) $\frac{157}{78} \cdot \frac{78}{157}$

P4. Laske.
- a) $\frac{-27}{7} \cdot \frac{14}{21}$
- b) $\frac{-35}{4} \cdot \frac{-2}{45}$
- c) $\frac{12}{9} : \frac{-2}{6}$
- d) $\frac{36}{49} \cdot \frac{28}{12}$

P5. Laske.
- a) $\frac{15}{7} : \frac{5}{14}$
- b) $\frac{-3}{4} + \frac{12}{8}$
- c) $\frac{42}{6} \cdot \frac{24}{12}$
- d) $\frac{1}{9} - \frac{-5}{7}$

P6. Mikä murtoluku sopii x:n paikalle? Muista supistaa vastaus.
- a) $\frac{1}{4} < \quad x \quad < \frac{3}{4}$
- b) $\frac{1}{3} < \quad x \quad < \frac{3}{4}$

c) $\frac{1}{2} < \quad x \quad < \frac{4}{4}$
d) $\frac{3}{8} < \quad x \quad < \frac{3}{7}$

P7. Laske.
a) $8 : \frac{5}{14}$
b) $7 - \frac{12}{8}$
c) $\frac{42}{6} \cdot 3$
d) $\frac{-5}{7} : (-11)$

MA159 Hopea (*T)

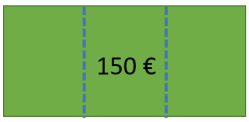
Osan ottaminen luvusta

Kun luvusta halutaan laskea tietty osa, luku kerrotaan osalla (murtoluvulla).

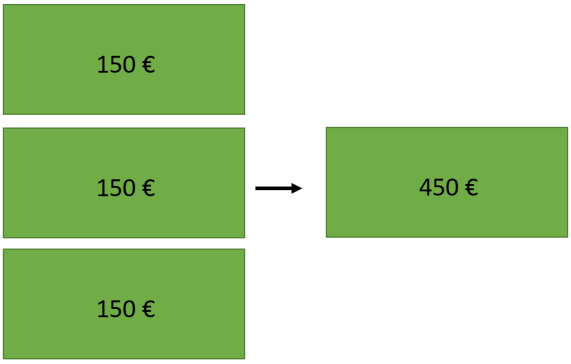
Esimerkki 1

Laske $\frac{2}{3}$ 150 .

Kyseessä on kertolasku.



Mikäli on vaikeaa hahmottaa, miksi kyseessä on kertolasku, mieti miten laskettaisiin jos olisi kolme 150 €:n seteliä.



Laskisit kertolaskulla $3 \cdot 150 = 450$.

Muutetaan kokonaisluku murtoluvuksi. Kun kokonaisluku jaetaan yhdellä, arvo ei muutu.

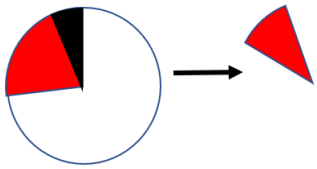
$\frac{2}{3} \cdot \frac{150}{1} = \frac{300}{3} = 100$

Vastaus 100 .

Kuvan piirtäminen auttaa hahmottamaan tehtäviä. Piirrä tehtäviä tehdessäsi mallikuvat.

Esimerkki 2

Rippijuhlien jälkeen mansikkakakkua oli jälellä $\frac{2}{7}$, josta Elmeri söi $\frac{1}{5}$. Kuinka paljon kakkua jäi tämän jälkeen?

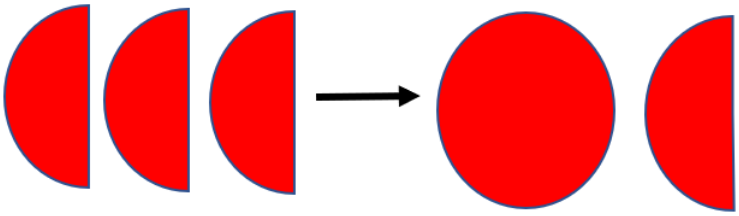


Koska kakusta otetaan tietty osa, niin luku $\frac{2}{7}$ kerrotaan otetulla osalla $\frac{1}{5}$ ja saadaan lasku

$\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{5}$
$= \frac{2}{35}$

Vastaus: Kakkua on jäljellä $\frac{2}{35}$.

Mikäli edellinen tuntuu vaikealta ymmärtää, niin mieti lasku helpoilla luvuilla. Esimerkiksi Elmeri söi kolme puolikasta kakkua.



$3 \cdot \frac{1}{2}$ $1\frac{1}{2}$

Kun kokonaisluku halutaan jakaa murto-osaan, lasketaan se murtolukujen

jakolaskulla.

Esimerkki 3

5 litran mehu pullotetaan $\frac{1}{3}$ litran pulloihin. Kuinka monta pulloa tulee?

Viisi litraa murtolukuna on $\frac{5}{1}$. Tämä kaadetaan $\frac{1}{3}$ pulloihin, eli jaetaan pieniin pulloihin.

$\frac{5}{1} : \frac{1}{3}$

Murtolukujen jakolasku muunnetaan kertolaskuksi "kiepsauttamalla"jakaja.

$= \frac{5}{1} \cdot \frac{3}{1}$
$= \frac{15}{1} = 15$

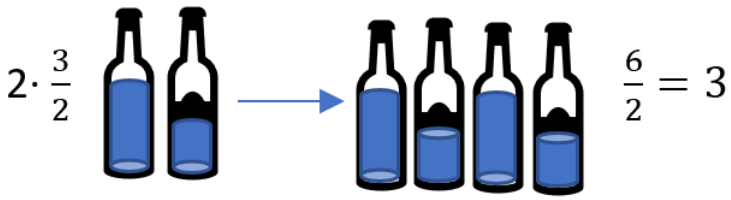
Vastaus 15 kappaletta.

Osan ottaminen luvusta ja murtoluvun jakaminen on haastava erottaa. Mieti huolella mitä kysytään ennen kuin tehtävää rupeat tekemään.

Esimerkki 4

a) Seppo ostaa kaksi puolentoista litran limukkapulloa. Kuinka paljon limukkaa Seppo ostaa?

Lasku lasketaan kertolaskulla

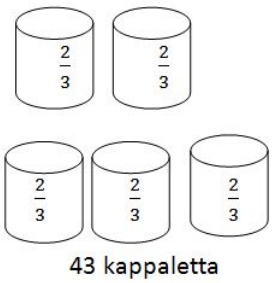


Muutetan sekaluku ja kokonaisluku murtoluvuiksi $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}, 2 = \frac{2}{1}$.

$\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2}$
$= \frac{6}{2} = 3$

Vastaus: Seppo ostaa kolme litraa limukkaa.

b) Nanna ostaa 43 kappaletta kaksikolmasosa litran hillopurkkia. Kuinka paljon hilloa mahtuu purkkeihin?



Lasku lasketaan kertolaskulla. Muutetaan kokonaisluku murtoluvuksi $43 = \frac{43}{1}$.

$\frac{43}{1} \cdot \frac{2}{3}$
$= \frac{86}{3}$

Tutkitaan luvun 86 kolmella jaollisuus $8 + 6 = 14 \rightarrow$ ei ole.
Tutkitaan luvun 85 kolmella jaollisuus $8 + 5 = 13 \rightarrow$ ei ole.
Tutkitaan luvun 84 kolmella jaollisuus $8 + 4 = 12 \rightarrow$ on.

Jaollisuussäännön perusteella luku 84 on jaollinen kolmella. Saadaan kokonaisosa $\frac{84}{3} = 26$

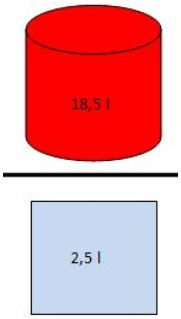
$\frac{86}{3} = 26\frac{2}{3}$

Vastaus: Hilloa mahtuu purkkeihin 26 litraa ja $\frac{2}{3}$.

Esimerkki 5

Alma poimi puolukoita 18,5 litraa. Kuinka monta pakastepussia puolukoiden pakastamiseen tarvitaan, kun pussin vetoisuus on

a) $2,5$
b) $0,37$
c) $\frac{1}{3}$ litraa?



Puolukat jaetaan kyseisiin pusseihin, joten kyseessä on jakolasku.

Muunnetaan tehtävän tiedot murtoluvuiksi. $18,5 = 18\frac{1}{2} = \frac{37}{2}, 2,5 = 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}, 0,37 = \frac{37}{100}$. Luku 0,23 luetaan kaksikymmentäkolme sadasosaa.

a) $\frac{37}{2} : \frac{5}{2}$
$= \frac{37}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{5}$
$= \frac{37}{5}$
$= 7\frac{2}{5}$

Vastaus: Tarvitaan 8 pussia.

b) $\frac{37}{2} : \frac{37}{100}$
$= \frac{\cancel{37}}{2} \cdot \frac{100}{\cancel{37}} =$
$\frac{100}{2} = 50$

Vastaus: Tarvitaan 50 pussia.

c) $\frac{37}{2} : \frac{1}{3}$
$= \frac{37}{2} \cdot \frac{3}{1}$
$= \frac{111}{2} = 55\frac{1}{2}$

Vastaus: Tarvitaan 56 pussia.

HUOM! Vastaukset pyöristetään tässä aina ylöspäin, koska halutaan, että

kaikki puolukat mahtuvat pakastimeen.

Tehtävät

H1. Kuinka monta minuuttia on
a) kaksi vuorokautta
b) $\frac{2}{3}$ vuorokautta
c) $1\frac{2}{5}$ vuorokautta
d) 3600 sekuntia?

H2. Marjoja on poimittu 11 litraa. Kuinka monta rasiaa tarvitaan, kun rasioiden tilavuus on
a) $\frac{1}{2}$ litraa
b) $\frac{3}{4}$ litraa
c) $1\frac{1}{3}$ litraa
d) $\frac{1}{3}$ litraa?

H3. Merkitse ja laske.
a) Kaksi kolmasosaa luvusta 54.
b) Kolme viidesosaa jaetaan kolmeen osaan.
c) Todista kolmella eri murtoluvulla, että luvun ja sen käänteisluvun tulo on aina yksi..
d) Laske neljäsosasta kolme neljäsosaa.

H4. Laske kuinka paljon tai kuinka monella.
a) Luokan 27 oppilaasta $\frac{2}{7}$ on silmälasit.
b) 170 euron palkasta $\frac{2}{5}$.
c) Luvusta 130 neljä kuudesosaa.
d) Neljä viidesosaa luvusta $7\frac{1}{2}$.

H5. Laske.
a) Luvun kantaluku on $\frac{1}{3}$ ja eksponentti 2.
b) Kolmeneljäsosaa jaettuna kaksi kuudesosalla.
c) Mikä luku on vähennettävä luvusta $\frac{5}{2}$, että erotus olisi $\frac{2}{3}$?
d) Millä luvulla luku $\frac{3}{7}$ on kerrottava että tuloksi tulisi $\frac{3}{28}$?

H6. Merkitse ja laske.
a) Lukujen $\frac{4}{5}$ ja $\frac{2}{6}$ summa kerrotaan kolmella.
b) Lukujen $\frac{4}{6}$ ja $\frac{2}{8}$ erotus jaetaan luvulla $\frac{1}{4}$.
c) Lukujen $\frac{6}{8}$ ja $\frac{8}{9}$ tuloon lisätään $\frac{2}{3}$.

d) Lukujen $\frac{2}{4}$ ja $\frac{1}{3}$ summaan lisätään lukujen $\frac{4}{8}$ ja $\frac{2}{5}$ erotus.

H7. a) Kaksi kuudesosaa luvusta on 40. Kuinka paljon on samasta luvusta $\frac{3}{8}$ osaa?

b) Mikä vertailumerkki tulee lukujen $\frac{4}{5}$ ja $\frac{2}{4}$ väliin? perustele.

MA159 Kulta (*T)

Esimerkki 1

Luokassa 45 oppilasta. $\frac{2}{5}$ tykkää mustikkamehuta, $\frac{1}{3}$ appelsiinimehusta, ja 5 tykkää molemmista. Loput eivät tykkää mehusta. Kuinka monta oppilasta ei tykkää mehusta?

Laskun voi laskea vaiheittain tai yhdellä lausekkeella.

Oppilaista tykkää mustikkamehusta $45 \cdot \frac{2}{5} = \frac{45}{1} \cdot \frac{2}{5} = \frac{90}{5} = 18$
Oppilaista tykkää appelsiinimehusta $45 \cdot \frac{1}{3} = \frac{45}{1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{90}{3} = 15$
Oppilaista tykkää molemmista 5.

Mehusta tykkää $18 + 15 + 5 = 38$ oppilaista. Mehusta ei tykkää $45 - 38 = 7$

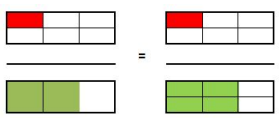
$45 - (5 + \frac{2}{5} \cdot 45 + \frac{1}{3} \cdot 45$
$= 45 - (5 + \frac{2}{5} \cdot \frac{45}{1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{45}{1})$
$= 45 - (5 + \frac{90}{5} + \frac{45}{3})$
$= 45 - (5 + 18 + 15)$
$= 45 - (38)$
$= 45 - 38$
$= 7$

Oppilaista 7 ei tykkää kummastakaan mehusta.

Murtolukujen mallinnus laventamalla jaettava ja jakaja samannimisiksi.

Esimerkki 2

Lasketaan $\frac{1}{6} : \frac{1}{3}$



Muutetaan laatikot samannimisiksi, saadaan $\frac{1}{6} : \frac{4}{6}$. Koska molemmissa on samat nimittäjät ne voidaan jättää pois ja saadaan vastaus $\frac{1}{4}$.

Esimerkki 3

Perustele murtolukujen laskukaava

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

Lavennetaan $\frac{d}{c}$:lla

$$= \frac{\frac{d}{c} \cdot \frac{a}{b}}{\frac{d}{c} \cdot \frac{c}{d}}$$

$$= \frac{\frac{d}{c} \cdot \frac{a}{b}}{\frac{\cancel{d} \cdot \cancel{c}}{\cancel{c} \cdot \cancel{d}}}$$

$$= \frac{\frac{d}{c} \cdot \frac{a}{b}}{1}$$

$$= \frac{d}{c} \cdot \frac{a}{b}$$

Joten ollaan saatu kaava.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{d}{c} \cdot \frac{a}{b}.$$

Tehtävät

K1. 420 koulun oppilasta osallistui urheilukisoihin 2/5 osallistui hyppylajeihin, 2/7 juoksulajeihin, ja 3/12 heittolajeihin. Loput osallistuivat toimitsijatehtäviin. Kuinka monta oppilasta toimi toimitsijoina?

K2. Mustikkamehua ostetaan kolme $1\frac{1}{3}$ litran pulloa. Kuinka monta $\frac{2}{7}$ litran mukia saa ostetuista mehuista?

K3. Kolmenlitran mehukannuun tulee mehutiivistettä $\frac{3}{7}$ ja loput vettä. Kuinka paljon vettä mehuun tarvitaan? Kuinka paljon kannussa on tiivistettä?

K4. Kahden luvun summa on 10 ja tulo 21 Mitkä ovat nämä luvut?

K5. Kahden luvun erotus on 0 ja tulo 49.

K6. Kahden murtoluvun summa on 1 ja tulo $\frac{21}{100}$.

K7. Kahden murtoluvun summa on 2 ja tulo $\frac{36}{100}$.

K8. Lukujen erotus on $\frac{8}{2}$ ja tulo $0,21$.

MA160 Tukiopetus- ja kertaustehtäviä

Teoriat on syytä kerrata ja laskusäännöt muisteltava. Laske tehtäviä kotona niin, että ne sujuvat mutkatta.

Desimaalilukujen ja murtolukujen yhteys

Desimaaliosat

$0,1 = 1:10 =$ kymmenesosa $= 1/10 = \frac{1}{10}$
$0,01 = 1:100 =$ sadasosa $= 1/100 = \frac{1}{100}$
$0,001 = 1:1000 =$ tuhannesosa $= 1/1000 = \frac{1}{1000}$
jne...

Desimaaliosat nimetään viimeisen osan mukaan.

Esimerkki 1

a) $0,45$ on neljäkymmentäviisi sadasosaa, eli murtolukuna $45/100 = \frac{45}{100}$ ja viidellä supistettuna $\frac{9}{20}$.

b) $0,234$ on kaksisataakolmekymmentäneljä tuhannesosaa, eli murtolukuna $\frac{235}{1000}$ ja viidellä supistettuna $\frac{47}{200}$.

Esimerkki 2

Muuta murtoluvuksi

a) $0,2 = 2/10 = 1/5$

b) $0,25 = 25/100 = 1/4$.

Kertaustehtävät

Tee aluksi tämän sivun tehtävät vihkoon. Lue vastausten info-painikkeesta tarvittaessa vihjeet laskemiseen.

- Pronssilehdellä perustehtävät.
- Hopealehdellä hieman haastavampia tehtäviä. - Kultalehdellä haastavia tehtäviä.

Valitse itsellesi sopivan tasoinen lehti ja laske sieltä kertaustehtäviä.

Tehtävät

1. Ilmoita sekalukumuodossa.
   a) $\frac{13}{4}$
   b) $\frac{17}{2}$
   c) $\frac{10}{4}$

2. Ilmoita murtolukumuodossa.
   a) $3\frac{1}{4}$
   b) $2\frac{4}{7}$

3. Lavenna samannimisiksi.
   a) $\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{4}$
   b) $\frac{1}{2}$ ja $\frac{2}{3}$

4. Laske.
   a) $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$
   b) $\frac{6}{7}-\frac{5}{7}$
   c) $\frac{5}{9}-\frac{6}{9}$
   d) $2-\frac{6}{9}$

5. Laske.
   a) $\frac{1}{4}+\frac{3}{2}$
   b) $\frac{1}{2}-\frac{5}{3}$
   c) $\frac{5}{9}-\frac{2}{3}$
   d) $\frac{5}{3}-\frac{2}{4}$

6. Laske.
   a) $\frac{1}{4} : \frac{3}{2}$
   b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3}$
   c) $\frac{5}{9} \cdot \frac{2}{3}$
   d) $\frac{5}{3} : \frac{2}{4}$

7. Laske.
   a) $\frac{1}{4} : \frac{3}{2}$
   b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3}$
   c) $\frac{5}{9} : \frac{2}{3}$
   d) $\frac{5}{3} \cdot \frac{2}{4}$

8. Laske.
   a) $4 \cdot \frac{3}{2}$

b) $\frac{3}{7} : 6$
c) $\frac{5}{9} : 2$
d) $7 \cdot \frac{2}{4}$

9. Laske.
a) $(\frac{4}{8} + \frac{2}{4}) : \frac{4}{5}$
b) $(\frac{4}{6} - \frac{3}{3}) : \frac{1}{2}$
c) $(\frac{2}{3} - \frac{4}{9}) \cdot \frac{2}{3}$
d) $(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}) \cdot \frac{1}{3}$

10. Laske.
a) $\frac{3}{5} + \frac{4}{5} - \frac{3}{5}$
b) $\frac{14}{15} + \frac{3}{3} \cdot \frac{4}{5}$
c) $(\frac{4}{3} + \frac{3}{3}) \cdot \frac{3}{5}$
d) $(\frac{4}{8} + \frac{2}{4}) : \frac{4}{5}$

MA160 Pronssi

Muista laskujärjestys!
- Sulkeet
- Potenssiin korottaminen
- Kerto- ja jakolaskut
- Yhteen- ja vähennyslaskut

Tehtävät

P1. Laske.
a) $\frac{3}{5} + \frac{4}{5} - \frac{3}{5}$
b) $\frac{1}{5} - \frac{7}{5} - \frac{3}{5}$
c) $\frac{1}{7} + \frac{3}{7} - \frac{4}{7}$
d) $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{4}{8}$

P2. Laske.
a) $\frac{14}{15} + \frac{3}{3} \cdot \frac{4}{5}$
b) $\frac{14}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{2}$
c) $\frac{3}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{6}{3} \cdot \frac{3}{5}$

P3. Laske.
a) $(\frac{4}{3} + \frac{3}{3}) \cdot \frac{3}{5}$
b) $(\frac{4}{3} - \frac{3}{3}) : \frac{1}{2}$
c) $(\frac{2}{3} - \frac{4}{3}) \cdot \frac{2}{3}$

d) $(\frac{2}{3} - \frac{3}{3}) \cdot \frac{3}{5}$

P4. Laske.
a) $(\frac{4}{8} + \frac{2}{4}) : \frac{4}{5}$
b) $(\frac{4}{6} - \frac{3}{3}) : \frac{1}{2}$
c) $(\frac{2}{3} - \frac{4}{9}) \cdot \frac{2}{3}$
d) $(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}) \cdot \frac{1}{3}$

P5. Laske.
a) $(\frac{1}{3} - \frac{3}{3}) - (\frac{1}{2} - \frac{3}{2})$
b) $(\frac{1}{6} - \frac{2}{3}) - (\frac{1}{4} - \frac{3}{2})$
c)) $(\frac{4}{5} - \frac{3}{10}) - (\frac{1}{5} - \frac{3}{5})$

P6. Luku 3 kerrotaan lukujen $\frac{4}{5}$ ja $\frac{4}{10}$ erotuksella.

P7. Ilmoita
a) $\frac{14}{3}$ sekalukuna
b) $6\frac{5}{7}$ murtolukumuodossa
c) $\frac{14}{21}$ supistettuna murtolukuna.

MA160 Hopea

Tehtävät

H1. muunna minuuteiksi.
a) $\frac{2}{3}$ h
b) $\frac{3}{2}$ h
c) $\frac{1}{6}$ h
d) $\frac{1}{2}$ h

H2. Kuinka monta tuntia on
a) $\frac{1}{24}$ d
b) $\frac{1}{2}$ d
c) $\frac{2}{3}$ d?

H3. Limukkaa pullotetaan $\frac{1}{4}$ litran pulloihin. Kuinka monta pulloa tarvitaan, kun pullotettavaa mehua on
a) 5 litraa
b) 1 litra

c) 15 litraa?

H4. Laske allekkain
a) $0,23 \cdot 0,24$
b) $0,2365 + 1,35$
c) $3,54 - 2,45$
d) $0,5 : 2$

H5. Luku on $123456,789$.
a) Mikä numero edustaa satoja?
b) Mikä numero edustaa tuhannesosia?
c) Pyöristä luku tuhansien tarkkuuteen
d) Pyöristä luku sadasosien tarkkuuteen.

H6. Laske.
a) $\frac{4}{7}$ 56 eurosta
b) $\frac{2}{3}$ murtoluvusta $\frac{2}{7}$

H7. Laske.
a) $2\frac{3}{7} : \frac{2}{7}$
b) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} : \frac{1}{3}$

H8. a) Kuinka monta $\frac{1}{3}$ litran pulloa tarvitaan, kun 6 litraa mehua pullotetaan?

b) Luokan 32 oppilaasta $\frac{3}{8}$ käyttää silmälasejä. Kuinka moni ei tarvitse silmälaseja?

MA160 Kulta

K1. Laske.
a)$(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}) \cdot 2\frac{3}{2}$
b) $(\frac{2}{3} + \frac{3}{5})\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}$
c) $2 \cdot \frac{3}{5} + 2(-\frac{1}{2} - \frac{3}{4})$
d) $(\frac{1}{4} : \frac{3}{4}) : (\frac{3}{2} : \frac{2}{3})$

K2. Laske.
a) $\frac{2 \cdot 5+3}{5} : \frac{3+8}{4 \cdot 6+9}$
b) $\frac{-3 \cdot 5-63}{5-4} : \frac{2(3+8)}{4 \cdot 6-10}$

K3. Laske lukujen $\frac{1}{5}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{7}{4}$, 3 ,$\frac{2}{4}$ keskiarvo.

K4. Mikä luku on lisättävä lukujen summaan, jotta tulos olisi 11?

a) $\frac{2}{3} + \frac{3}{5}$

b) $\frac{1}{9} - \frac{2}{3}$

K5. Matti, Maija ja Jussi jakavat 450 , siten että Matti saa $\frac{2}{6}$, Maija saa $\frac{2}{3}$ ja Jussi loput. Miten rahat jakautuvat?

K6. Kuusi litraa mehua jaetaan $\frac{2}{5}$ litran pulloihin. Kuinka monta pulloa tarvitaan?